МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ДНІПРОВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

ФАКУЛЬТЕТ ПРИРОДНИЧИХ НАУК ТА ТЕХНОЛОГИЙ
Кафедра прикладної математики

С.Є. Тимченко, Д.В. Клименко, П.М. Щербаков, А.Г. Шпорта

КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ

Методичні рекомендації до практичних занять
з дисципліни «Математичний аналіз» для здобувачів ступеня бакалавра
спеціальності 113 «Прикладна математика»

Дніпро
НТУ «ДП»
2024

Тимченко С.Є.

Криволінійні інтеграли : методичні рекомендації до практичних занять з дисципліни «Математичний аналіз» для здобувачів ступеня бакалавра спеціальності 113 «Прикладна математика» / С.Є. Тимченко, Д.В. Клименко, П.М. Щербаков, А.Г. Шпорта ; М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – Дніпро : НТУ «ДП», 2024. – 50 с.

Автори:
С.Є. Тимченко, канд. техн. наук, доц.
Д.В. Клименко, канд. техн. наук, доц.
П.М. Щербаков, канд. техн. наук, доц.
А.Г. Шпорта, канд. фіз.-мат. наук, доц.

Затверджено науково-методичною комісією спеціальності 113 «Прикладна математика» (протокол № 01/24 від 20.01.2024) за поданням кафедри прикладної математики (протокол №01/24 від 17.01.2024)

Дані методичні рекомендації до практичних занять містять відомості з теорії, вказівки до розв’язання задач відповідного типу, розібрані контрольні приклади, завдання з відповідями для самостійної роботи студентів, а також варіанти індивідуальних завдань з кожного розглянутого розділу.

Відповідальна за випуск завідувачка кафедри прикладної математики О.О. Сдвижкова, д-р техн. наук, проф.

ВСТУП

Застосування дистанційної форми навчання супроводжується певними складнощами, обумовленими як технічними, так і психологічними факторами. Тому студенти не завжди мають повне розуміння тих положень, які вони інформативно отримують з екрану комп'ютера.

Мета даної методичної розробки - надати студентам істотну допомогу при вивченні розділу «Криволінійний інтеграл». Структура цієї роботи складається з теоретичного і практичного розділів окремо для кожної теми, що дає змогу кожному студенту конкретно визначитись, куди йому необхідно звернутися за консультаційною допомогою.

Всі теоретичні викладки містять додаткові пояснення тих положень, що зустрічалися раніше, наприклад у школі, та супроводжуються характерними прикладами.

Практична частина орієнтована на розгляд випадків, що складають основу для розуміння відповідного алгоритму розв'язку. Застосування методу стислого повторення деяких означень чи математичних перетворень сприяє кращому засвоюванню важливих понять.

Методичні вказівки містить завдання для самоконтролю з відповідями та індивідуальні завдання для перевірки знань у разі дистанційної роботи. Також наведено приклад повного розв'язку типового індивідуального завдання.

Методичні вказівки призначені для здобувачів ступеня бакалавра спеціальності 113 «Прикладна математика», які опановують розділ «Криволінійні інтеграли» з дисципліни «Математичний аналіз». Також може бути рекомендований для студентів перших курсів технічних закладів вищої освіти всіх форм навчання та науково-педагогічних працівників, які викладають курс вищої математики, зокрема, у дистанційному форматі.

Криволінійні інтеграли

Узагальнимо поняття визначеного інтеграла на випадок, коли областю інтегрування є деяка крива. Такі інтеграли називаються криволінійними.

1. Криволінійні інтеграли 1-го роду

1.1. Поняття криволінійного інтеграла 1-го роду (по довжині дуги)

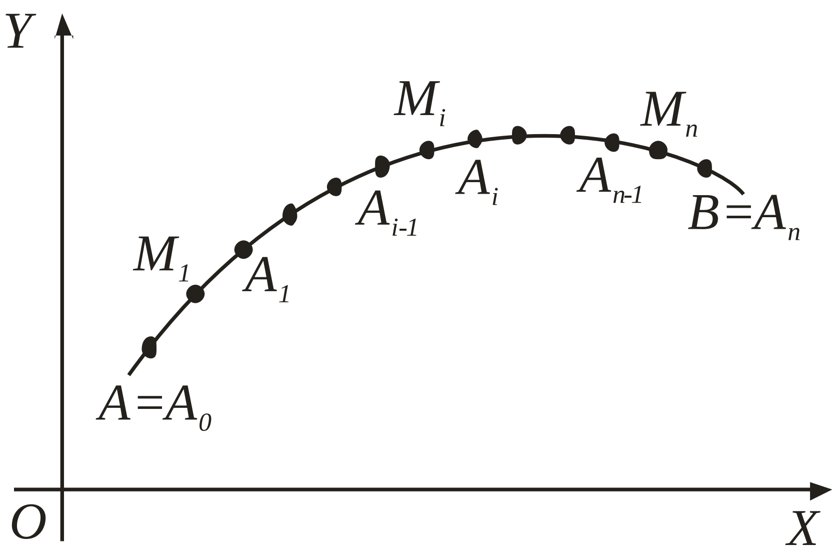


Рис. 1.

Нехай у площині *Oxy* задано гладку чи кусково-гладку криву *AB* (див. рис.1) і на цій кривій визначено обмежену функцію $f(x;y)$. Розіб'ємо криву *AB* точками $A = A_0, A_1 ... A_{n-1}, A_n = B$ на n довільних частин, на кожній окремій дузі $A_{i-1}A_i$ виберемо яку-небудь точку $M_i(\xi_i, \eta_i)$ $i = 1,2\ldots.n$ і складемо суму

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta l_i\ , \qquad (1)$$

де Δl_i - довжина дуги $A_{i-1}A_i$.

Нехай $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n} \Delta l_i$ - найбільша з довжин окремих дуг $A_{i-1}A_i$. Якщо при $\lambda \to 0$ інтегральні суми (1) мають скінчену границю, яка не залежить від розбиття кривої AB і вибору точок M_i , то цю границю називають **криволінійним інтегралом першого роду або інтегралом по довжині дуги** від функції $f(x;y)$ по кривій AB і позначають $\int\limits_{AB} f(x;y)dl$. Таким чином, за означенням

$$\int\limits_{AB} f(x;y)dl = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta l_i \tag{2}$$

Крива AB – контур інтегрування, A – початкова, а B – кінцева точки інтегрування. Треба замітити, що $\int\limits_{AB} f(x;y)dl = \int\limits_{BA} f(x;y)dl$.

Дійсно, адже довжина Δl_i дуги $A_{i-1}A_i$ не залежить від того, яка з точок A_{i-1} та A_i прийнята за початок і яка за кінець дуги.

1.2. Фізичний зміст криволінійного інтеграла першого роду

Якщо вздовж неоднорідної матеріальної кривої AB розподілено масу m з лінійною густиною $\gamma(x;y)$, то $m = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} \gamma(\xi_i;\eta_i)\Delta l_i = \int\limits_{AB} \gamma(x;y)dl$, тобто з фізичної точки зору криволінійний інтеграл першого роду від невід’ємної функції вздовж деякої кривої дорівнює масі цієї кривої.

1.3. Геометричний зміст криволінійного інтегралу першого роду

Якщо визначений інтеграл $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{\Delta x_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_{i_i})\Delta x_i$ при $f(x) = 0$ визначає площу криволінійної трапеції, то криволінійний інтеграл (2) при $f(x;y) \geq 0$ чисельно дорівнює площі частини циліндричної поверхні, твірні якої мають довжину $f(x;y)$ і паралельні осі Oz, а напрямна збігається з кривою AB на площині Oxy (рис. 2).

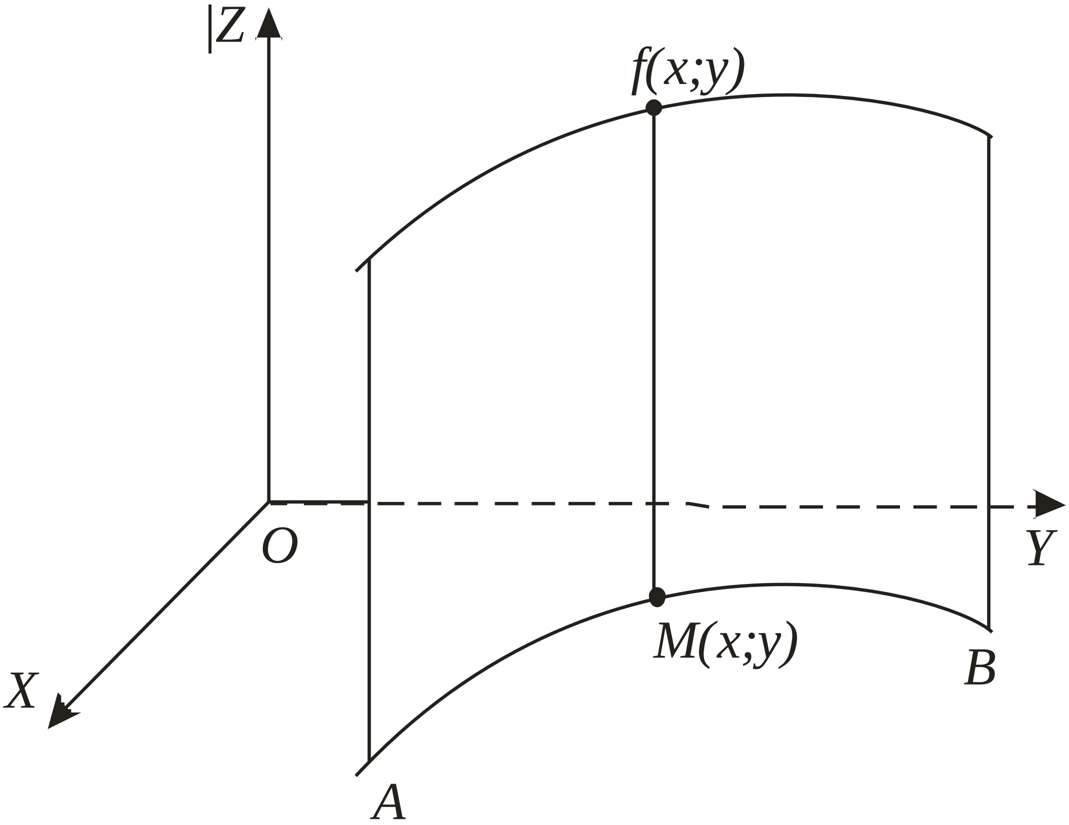


Рис. 2.

1.4. Властивості криволінійних інтегралів першого роду

1. Постійний множник можна виносити за знак криволінійного інтеграла $\int\limits_L Cf(x;y)dl = C\int\limits_L f(x;y)dl$.

2. Криволінійний інтеграл від алгебраїчної суми кінцевого числа функцій дорівнює такий же сумі криволінійних інтегралів від додатків $\int\limits_L (f(x;y) \pm g(x,y))dl = \int\limits_L f(x;y)dl \pm \int\limits_L g(x;y)dl$.

3. Якщо шлях інтегрування поділений на кінцеве число частин, то криволінійний інтеграл по всьому шляху дорівнює сумі криволінійних інтегралів по всіх його частинах.

4. Так як, за означенням криволінійного інтегралу Δl_i - довжина дуги, тому завжди $\Delta l_i > 0$ і тому $\int\limits_{AB} f(x;y)dl = \int\limits_{BA} f(x;y)dl$, тобто межі інтегрування в

криволінійному інтегралі першого роду завжди треба брати від меншої до більшої.

1.5. Обчислення криволінійних інтегралів першого роду

1. Нехай крива AB задана рівнянням $x = x(t);\ y = y(t),\ t \in [\alpha;\beta]$, причому значення α відповідає точці A, а значення β - точці B. Вважатимемо, що функції $x = x(t)$ і $y = y(t)$ разом з похідними $x'(t)$ і $y'(t)$ неперервні на відрізку $[\alpha;\beta]$, а функція $f(x;y)$ неперервна вздовж кривої AB. Тоді криволінійний інтеграл першого роду $\int\limits_{AB} f(x;y)dl$ зводиться до визначеного інтеграла:

$$\int\limits_{AB} f(x;y)dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t);y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt \qquad (3)$$

2. Якщо крива AB в декартових координатах задана рівнянням $y = y(x)$, $a \le x \le b$, де функція $y(x)$ неперервна разом із своєю похідною $y'(x)$ на відрізку $[a;b]$, то

$$\int\limits_{AB} f(x;y)dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x;y(x))\sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx \qquad (4)$$

3. Якщо криву AB задано полярним рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$ $(\varphi_1 < \varphi < \varphi_2)$, то

$$\int\limits_{AB} f(x;y)dl = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(\rho\cos\varphi;\rho\sin\varphi)\sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\,d\varphi \qquad (5)$$

Приклади

1. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{AB}(x - y)dl$, де AB – відрізок прямої від точки $A(0;0)$ до точки $B(4;3)$.

Розв'язання: рівняння прямої AB: $y=\frac{3}{4}x$. Тоді $y'=\frac{3}{4}$; $0 \le x \le 4$. Скористуємося формулою (4). Отримаємо:

$$\int_{AB}(x-y)dl=\int_0^4 (x-\frac{3}{4}x)\sqrt{1+(\frac{3}{4})^2}dx=\int_0^4 \frac{x}{4}\cdot\frac{5}{4}dx=\frac{5}{16}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^4=\frac{5}{2}.$$

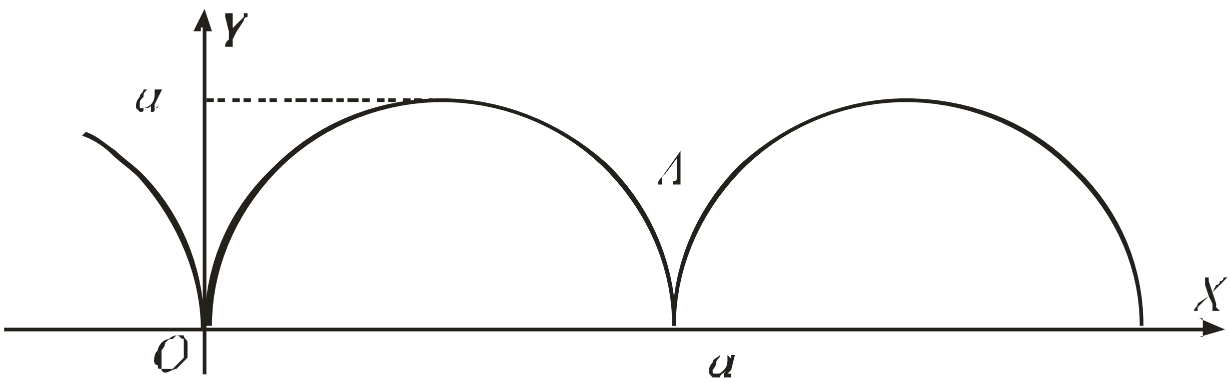
2. Обчислити криволінійний інтеграл $I=\int_L \frac{ds}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$, якщо L – відрізок прямої, з'єднуючий точки $O(0;0)$ до точки $A(1;2)$.

Розв'язання: рівняння прямої OA: $\frac{x-0}{1-0}=\frac{y-0}{2-0}$, звідки $y=2x$, диференціал дуги $ds=\sqrt{1+(y')^2}dx=\sqrt{5}dx$. Тоді

$$I=\int_L \frac{ds}{\sqrt{x^2+y^2+4}}=\int_0^1 \frac{\sqrt{5}dx}{\sqrt{x^2+4x^2+4}}=\int_0^1 \frac{\sqrt{5}dx}{\sqrt{5x^2+4}}=\int_0^1 \frac{\sqrt{5}dx}{\sqrt{5(x^2+\frac{4}{5})}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+\frac{4}{5}}\right|\Bigg|_0^1=$$

$$=\ln(1+\frac{3}{\sqrt{5}})-\ln(\frac{2}{\sqrt{5}})=\ln(\frac{\sqrt{5}+3}{2}).$$

3. Обчислити $I=\int_L y^2 ds$, якщо L - арка циклоїди $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$, $0 \le t \le 2\pi$.



Розв'язання: диференціал дуги $ds=\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}dt$, $\begin{cases} x_t'=a(1-\cos t) \\ y_t'=a\sin t \end{cases}$, тоді

$$ds=\sqrt{(a(1-\cos t)^2+(a\sin t)^2}dt=\sqrt{a^2(1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t}dt=a\sqrt{2(1-\cos t)}dt=$$
$$=2a\sqrt{\sin^2\frac{t}{2}}dt=2a\sin^2\frac{t}{2}dt.$$

$$I=\int_L y^2ds=\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2 2a\sin\frac{t}{2}dt=2a^3\int_0^{2\pi}(2\sin^2\frac{t}{2})^2\sin\frac{t}{2}dt=8a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos^2\frac{t}{2})^2\sin\frac{t}{2}dt=$$

$$=-16a^3\int_0^{2\pi}(1-2\cos^2\frac{t}{2}+\cos^4\frac{t}{2})d(\cos\frac{t}{2})=-16a^3(\cos\frac{t}{2}-2\frac{\cos^3\frac{t}{2}}{3}+\frac{\cos^5\frac{t}{2}}{5})\Bigg|_0^{2\pi}=$$

$$=-16a^3(\cos\pi-\frac{2}{3}\cos^3\pi+\frac{1}{5}\cos^5\pi-\cos 0+\frac{2}{3}\cos^3 0-\frac{1}{5}\cos^5 0)=\frac{256}{15}a^3.$$

4. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L(2z-\sqrt{x^2+y^2})dl$, де L – дуга кривої $x=t\cos t;\quad y=t\sin t;\quad z=t;\quad 0\le t\le 2\pi$.

Розв'язання: поширимо формулу (3) на випадок коли крива L задана у просторі. Тобто формула (3) буде мати вигляд:

$$\int\limits_{AB}f(x;y)dl=\int\limits_{\alpha}^{\beta}f(x(t);y(t);z(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}dt.$$

Оскільки $x'=\cos t-t\sin t;\quad y'=\sin t+t\cos t$,

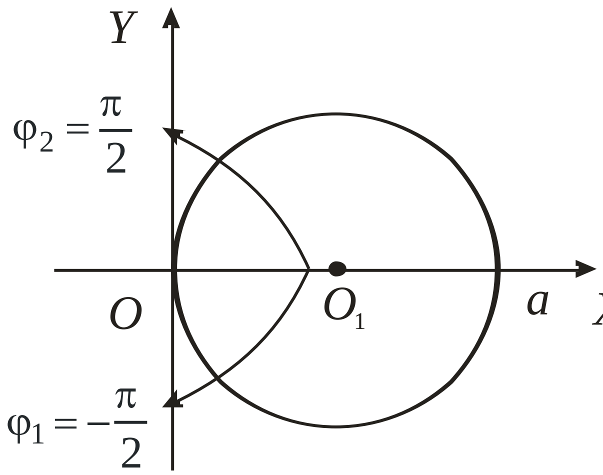
$$dl=\sqrt{(\cos t-t\sin t)^2+(\sin t+t\cos t)^2+1}dt=$$
$$=\sqrt{\cos^2 t-2t\cos t\sin t+t^2\sin^2 t+\sin^2 t+2t\sin t\cos t+t^2\cos^2 t+1}dt=$$
$$=\sqrt{2+t^2(\sin^2 t+\cos^2 t)}dt=\sqrt{t^2+2}dt.$$

Тоді $\int\limits_L(2z-\sqrt{x^2+y^2})dl=\int\limits_0^{2\pi}(2t-\sqrt{t^2\cos^2 t+t^2\sin^2 t})\sqrt{t^2+2}dt=$

$$\int_0^{2\pi}t\sqrt{t^2+2}dt=\begin{Bmatrix} t^2+2=k; & 2tdt=dk \\ t_1=0; & k_1=2 \\ t_2=2\pi; & k_2=4\pi^2+2 \end{Bmatrix}=\frac{1}{2}\int_2^{2\pi^2+2}\sqrt{k}dk=\frac{1}{2}\frac{k^{3/2}}{3/2}\Bigg|_2^{2\pi^2+2}=$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{k^3}\Big|_2^{2\pi^2+2} = \frac{1}{3}((4\pi^2+2)\sqrt{4\pi^2+2} - 2\sqrt{2}) = \frac{2}{3}((2\pi^2+1)\sqrt{4\pi^2+2} - \sqrt{2}).$$

5. Обчислити $I = \int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,ds$, якщо L – контур кола $x^2 + y^2 = ax$.



Розв'язання: впроваджуємо полярні координати $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$.

Рівняння кола набирає вигляду:

$\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = a\rho\cos\varphi,$

$\rho^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = a\rho\cos\varphi,$

$\rho = a\cos\varphi, \ \ \rho' = -a\sin\varphi.$

Для знаходження кута φ побудуємо коло $x^2 + y^2 = ax$: $(x^2 - ax) + y^2 = 0$,

$(x^2 - ax)^2 + y^2 - \frac{a^2}{4} = 0, (x^2 - ax)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}.$

Центр кола $O(\frac{a}{2};0)$, радіус $R = \frac{a}{2}$. Коло розташовано у I та IV чвертях, отже кут φ змінюється від $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$.

$$ds = \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\,d\varphi = \sqrt{a^2\cos^2\varphi + (-a\sin\varphi)^2}\,d\varphi = \sqrt{a^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}\,d\varphi = a\,d\varphi.$$

$$I = \int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,ds = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(\rho\cos\varphi)^2 + (\rho\sin\varphi)^2}\,a\,d\varphi = a\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\rho^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}\,d\varphi =$$

$$= a\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho\,d\varphi = a\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a\cos\varphi\,d\varphi = a^2(\sin\varphi)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = a^2(\sin\frac{\pi}{2} - \sin(-\frac{\pi}{2})) = 2a^2.$$

1.6. Застосування криволінійного інтегралу першого роду

1.6.1. Застосування в геометрії

Нехай у площині *Oxy* задано кусково-гладку криву *AB*: замкнену чи незамкнену і на цій кривій визначено неперервну функцію *f*(*x*;*y*), тоді:

а) площу *P* циліндричної поверхні, визначеної функцією *z*=*f*(*x*;*y*), знаходять за формулою

$$P = \int_{AB} f(x;y)dl \tag{6}$$

б) довжину *L* кривої *AB* визначають за формулою

$$L = \int_{AB} dl \tag{7}$$

Приклади

1. Обчислити площу заданої циліндричної поверхні, розміщеною між площиною *Oxy* і поверхнями $y = \frac{3}{8}x^2, \quad x = 0, \quad y = 6, \quad z = x$.

Розв'язання: Циліндричної поверхні, визначеної функцією *z*=*f*(*x*;*y*), знаходять за формулою (6) $P = \int_{AB} f(x;y)dl$. Згідно з умовою $z = f(x,y) = x$.

Знайдемо $dl = \sqrt{1+(y')^2}dx; \quad y' = (\frac{3}{8}x^2)' = \frac{6}{8}x = \frac{3}{4}x.$

Границі інтегрування знайдемо з умові $\begin{cases} y = \frac{3}{8}x^2 \\ y = 6 \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{8}x^2 = 6 \Rightarrow x = \pm 4.$ Т. к. ще є умова $x = 0$, то $0 \le x \le 4$. Отже:

$$P = \int_{AB} f(x;y)dl = \int_0^4 x\sqrt{1+(\frac{3}{4}x)^2}dx = \int_0^4 x\sqrt{1+\frac{9}{16}x^2}dx = \left\{ \begin{matrix} 1+\frac{9}{16}x^2 = t; & \frac{18}{16}xdx = dt \\ x_1 = 0; t_1 = 1; & x_2 = 4; t_2 = 10 \end{matrix} \right\} =$$

$$=\int_1^{10}\frac{16}{18}\sqrt{t}dt=\frac{8}{9}\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Bigg|_1^{10}=\frac{16}{27}(10^{\frac{3}{2}}-1)=\frac{16}{27}(10\sqrt{10}-1)\quad (\text{кв.од}).$$

2. Знайти довжину дуги кривої $x=3t,\quad y=3t^2,\quad z=2t^3$ від точки $O(0;0;0)$ до точки A (3;3;2).

Розв'язання: За формулою (7) $L=\int\limits_{AB}dl=\int\limits_{t_1}^{t_2}\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2+(z_t')^2}dt$. Знайдемо границі інтегрування. Точка $O(0;0;0)$ – початкова точка. $\begin{cases}x=0=3t\\ y=0=3t^2\Rightarrow t=0.\\ z=0=2t^3\end{cases}$

Точка A (3;3;2) – кінцева точка. $\begin{cases}x=3=3t\\ y=3=3t^2\Rightarrow t=1.\\ z=2=2t^3\end{cases}$

$$L=\int_0^1\sqrt{3^2+(6t)^2+(6t^2)^2}dt=\int_0^1\sqrt{9+36t^2+36t^4}dt=3\int_0^1\sqrt{1+4t^2+4t^4}dt=$$

$$=3\int_0^1\sqrt{(1+2t^2)^2}dt=3\int_0^1(1+2t^2)dt=3(t+\frac{2}{3}t^3)\Bigg|_0^1=3(1+\frac{2}{3})=3\cdot\frac{5}{3}=5\ (\text{од.}).$$

1.6.2. Застосування в механіці

Нехай вздовж неоднорідної матеріальної кривої L розподілено масу m з лінійною густиною $\gamma(x;y)$, тоді:

а) маса кривої L обчислюється за формулою

$$m=\int\limits_L\gamma(x;y)dl \tag{8}$$

б) координати x_c, y_c центра маси кривої L знаходяться за формулами

$$x_c = \frac{\int\limits_L x\gamma(x;y)dl}{\int\limits_L \gamma(x;y)dl} = \frac{M_y}{m}; \quad y_c = \frac{\int\limits_L y\gamma(x;y)dl}{\int\limits_L \gamma(x;y)dl} = \frac{M_x}{m} \qquad (9)$$

Де M_x, M_y – статичні моменти кривої L відповідно осей Ox і Oy;

в) моменти інерції I_x, I_y, I_0 кривої L відносно осей Ox, Oy і початку координат відповідно дорівнюють

$$I_x = \int\limits_L y^2\gamma(x;y)dl; \quad I_y = \int\limits_L x^2\gamma(x;y)dl; \quad I_0 = \int\limits_L (x^2+y^2)\gamma(x;y)dl \qquad (10)$$

У випадку коли крива однорідна, тобто має сталу густину γ_0, у наведених формулах слід вважати $\gamma(x;y) = \gamma_0$.

Приклади

1. Знайти масу дуги кривої $y = \ln x, \quad 1 \le x \le 3$, якщо густина її в кожній точці дорівнює квадрату абсциси цієї точки.

Розв'язання: За формулою (8) $m = \int\limits_L \gamma(x;y)dl$, де $\gamma(x,y) = x^2$ - за умовою.

$$m = \int\limits_L x^2 dl = \int\limits_L x^2\sqrt{1+(y')^2}dx = \int\limits_1^3 x^2\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}dx = \int\limits_1^3 x\sqrt{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} =$$

$$= \frac{1}{3}(\sqrt{(1+9)^3} - \sqrt{(1+1)^3} = \frac{1}{3}(10\sqrt{10} - 2\sqrt{2}) \ (\textit{од. маси}).$$

2. Визначити координати центра маси однорідної кривої $x = a\cos t; \quad y = a\sin t; \quad z = bt; \quad 0 \le t \le \pi.$

Розв'язання: Згідно (9) координати x_c, y_c, z_c центра маси кривої L знаходяться за формулами

$$x_c = \frac{\int\limits_L x\gamma(x;y;z)dl}{\int\limits_L \gamma(x;y;z)dl}; \quad y_c = \frac{\int\limits_L y\gamma(x;y;z)dl}{\int\limits_L \gamma(x;y;z)dl}; \quad z_c = \frac{\int\limits_L z\gamma(x;y;z)dl}{\int\limits_L \gamma(x;y;z)dl}.$$

Крива однорідна, тобто $\gamma = c - const$. Тоді

$$\int\limits_L \gamma(x,y,z)dl = \int\limits_L cdl = c\int\limits_{t_1}^{t_2}\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2 + (z_t')^2}\,dt .$$

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = bt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_t' = -a\sin t \\ y_t' = a\cos t \\ z_t' = b \end{cases}.$$ Звідки

$$\int\limits_L \gamma(x,y,z)dl = c\int\limits_0^{\pi}\sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2}\,dt = c\int\limits_0^{\pi}\sqrt{a^2 + b^2}\,dt = c\sqrt{a^2+b^2}\,t\Big|_0^{\pi} = c\sqrt{a^2+b^2}\,\pi .$$

Знайдемо інші інтеграли: $\int\limits_L x\gamma(x,y,z)dl = c\int\limits_0^{\pi} a\cos t\sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2}\,dt =$

$ca\sqrt{a^2+b^2}\int\limits_0^{\pi}\cos t dt = ca\sqrt{a^2+b^2}\sin t\Big|_0^{\pi} = 0.$ Тоді $x_c = \dfrac{\int\limits_L x\gamma(x;y;z)dl}{\int\limits_L \gamma(x;y;z)dl} = 0$.

Далі знайдемо $\int\limits_L y\gamma(x,y,z)dl = c\int\limits_0^{\pi} a\sin t\sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2}\,dt =$

$$= ca\sqrt{a^2+b^2}\int\limits_0^{\pi}\sin t dt = ca\sqrt{a^2+b^2}(-\cos t)\Big|_0^{\pi} = -ca\sqrt{a^2+b^2}(-1-1) = 2ca\sqrt{a^2+b^2}.$$

Звідки $y_c = \dfrac{\int\limits_L y\gamma(x;y;z)dl}{\int\limits_L \gamma(x;y;z)dl} = \dfrac{2ca\sqrt{a^2+b^2}}{c\pi\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{2a}{\pi}.$

Для третій координати маємо:

$$\int\limits_L z\gamma(x,y,z)dl = c\int\limits_0^{\pi} bt\sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2}\,dt = cb\sqrt{a^2+b^2}\int\limits_0^{\pi} tdt =$$

$$= ca\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^{\pi} = cb\sqrt{a^2+b^2}\,\frac{\pi^2}{2}.$$

Тоді $z_c = \dfrac{\int\limits_L z\gamma(x;y;z)dl}{\int\limits_L \gamma(x;y;z)dl} = \dfrac{cb\sqrt{a^2+b^2}}{\pi c\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\dfrac{\pi^2}{2} = \dfrac{b\pi}{2}.$

Таким чином, координати центра мас даної кривої $(0; \frac{2a}{\pi}; \frac{b\pi}{2})$.

3. Знайти моменти інерції відносно осей координат і початку координат відрізка однорідної ($\gamma(x;y)=1$) прямої $y+2x-1=0 \quad (y\ge 0; x\ge 0)$.

Розв'язання: Згідно з (10) для однорідної прямої момент інерції відносно осі Ox знаходиться за формулою $I_x=\int\limits_L y^2 dl.$ За умовою $y=-2x+1 \Rightarrow y'=-2 \Rightarrow dl=\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\sqrt{5}dx.$ Границі інтегрування знайдемо за умовами $\begin{cases} y+2x-1=0 \\ x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow$ кінці відрізка AB мають координати $A(\frac{1}{2};0)$ і $B(0;1)$.

Тоді $I_x=\int\limits_L y^2 dl=\int\limits_0^{\frac{1}{2}}(1-2x)^2\sqrt{5}dx=\sqrt{5}\frac{(1-2x)^3}{3\cdot(-2)}\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}=-\frac{\sqrt{5}}{6}(0-1)=\frac{\sqrt{5}}{6}.$

Момент інерції відносно осі Oy: $I_y=\int\limits_L x^2 dl=\int\limits_0^{\frac{1}{2}}x^2\sqrt{5}dx=\sqrt{5}\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{5}}{3}\cdot\frac{1}{8}=\frac{\sqrt{5}}{24}.$

Момент інерції відносно початку координат: $I_0=\int\limits_L (x^2+y^2)\gamma(x;y)dl=$

$$=\int\limits_0^{\frac{1}{2}}(x^2+(1-2x)^2)\sqrt{5}dx=\sqrt{5}(\frac{x^3}{3}+\frac{(1-2x)^3}{3(-2)})\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5}((\frac{1}{24}-\frac{(1-2\cdot\frac{1}{2})^3}{6}-(0-\frac{1}{6}))=$$

$$=\sqrt{5}(\frac{1}{24}+\frac{1}{6})=\frac{5\sqrt{5}}{24}.$$

2. Криволінійні інтеграли 2-го роду

2.1. Поняття криволінійного інтеграла 2-го роду (по координатах)

Нехай у площині Oxy задано гладку чи кусково-гладку криву AB (див. рис. 3) і на цій кривій визначено обмежену функцію $P(x;y)$. Розіб'ємо криву AB точками $A = A_0, A_1 \ldots A_{n-1}, A_n = B$ на n довільних частин, на кожній окремій дузі $A_{i-1}A_i$ виберемо яку-небудь точку $M_i(\xi_i, \eta_i)$ $i = 1,2\ldots n$ і складемо суму

$$\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i , \qquad (11)$$

де Δx_i - проекція вектора $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$ на вісь Ox.

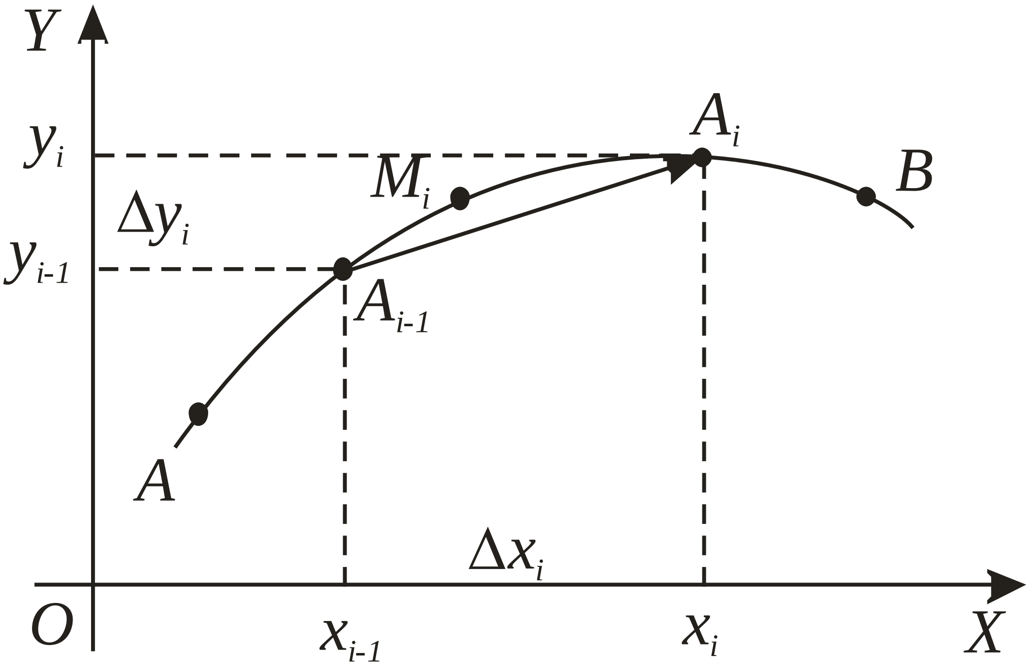


Рис. 3

Якщо при $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta l_i \to 0$ інтегральні суми (11) мають скінчену границю, яка не залежить ні від розбиття кривої AB, ну від вибору точок M_i, то цю границю називають криволінійним інтегралом функції $P(x;y)$ по координаті x вздовж кривої AB і позначають $\int\limits_{AB} P(x;y)dx$. Таким чином

$$\int\limits_{AB} P(x;y)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i \qquad (12)$$

Аналогічно вводиться криволінійний інтеграл від функції $Q(x;y)$ по координаті y:

$$\int\limits_{AB} Q(x;y)dy = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i \qquad (12a)$$

де Δy_i - проекція вектора $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$ на вісь Oy.

Суму $\int\limits_{AB} P(x;y)dx + \int\limits_{AB} Q(x;y)dy$ називають криволінійним інтегралом по координатах або криволінійним інтегралом другого роду від функцій $P(x;y)$ і $Q(x;y)$ по кривій AB і позначають:

$$\int\limits_{AB} P(x;y)dx + Q(x;y)dy \text{ або } \int\limits_{AB} Pdx + Qdy \qquad (13)$$

2.2. Фізичний зміст криволінійного інтеграла другого роду

Для того щоб дати фізичну інтерпретацію криволінійного інтеграла другого роду, розглянемо задачу про роботу змінної сили на криволінійному шляху. Нехай матеріальна точка $M(x;y)$ під дією змінної сили $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$, де $P(x;y)$, $Q(x;y)$ - проекції сили на осі Ox, Oy, рухається на площині Oxy вздовж кривої BC. Треба обчислити роботу A сили $\vec{F}$ при переміщенні точки $M(x;y)$ з точки B в точку C (рис. 4).

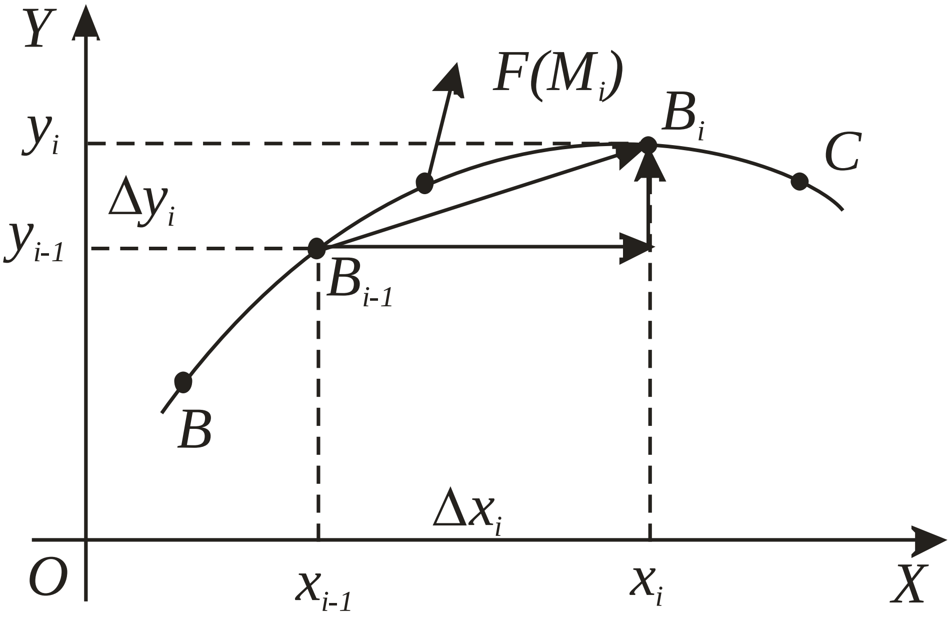


Рис. 4

Розіб’ємо криву BC точками $B = B_0, B_1 ... B_{n-1}, B_n = C$ на n частин і на кожній окремій дузі $B_{i-1}B_i$ візьмемо довільну точку $M_i(\xi_i, \eta_i)$ i = 1,2….n. На цю точку діє сила $\vec{F}(M_i) = P(M_i)\vec{i} + Q(M_i)\vec{j}$. Роботу ΔA_i, яку виконує ця сила при переміщенні точки по вектору $\overrightarrow{B_{i-1}B_i} = \Delta x_i \vec{i} + \Delta y_i \vec{j}$ можна знайти за допомогою скалярного добутку $\Delta A_i = \vec{F}(M_i) \cdot \overrightarrow{B_{i-1}B_i} = P(\xi_i;\eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i;\eta_i)\Delta y_i$. Ця робота наближено дорівнює роботі змінної сили $\vec{F}$ при переміщенні матеріальної точки по дузі $B_{i-1}B_i$ довжиною Δl_i.

Робота сили вздовж усієї ламаної $B_0, B_1 ... B_{n-1}, B_n$ дорівнює $A_n = n\sum_{n=1}^{\infty} P(\xi_i;\eta_i)\Delta x_i + \sum_{n=1}^{\infty} Q(\xi_i;\eta_i)\Delta y_i$. Цій вираз дає наближене значення шуканої роботи A. Перейшовши до границі при $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta l_i \to 0$, знайдемо точне її значення: $A_n = \lim\limits_{\lambda \to 0} (\sum_{n=1}^{\infty} P(\xi_i;\eta_i)\Delta x_i + \sum_{n=1}^{\infty} Q(\xi_i;\eta_i)\Delta y_i) = \int\limits_{BC} Pdx + Qdy$. Отже, з погляду фізики, криволінійний інтеграл другого роду вздовж деякої кривої дорівнює роботі змінної сили при переміщенні матеріальної точки вздовж цієї кривої.

2.3. Властивості криволінійного інтеграла другого роду

Перші три властивості такі самі як і у криволінійного інтеграла першого роду (див. 1.4). На відміну від криволінійного інтеграла першого роду важлива черга букв А та В. Тобто, при зміні напряму лінії, по якій ведеться інтегрування, криволінійний інтеграл другого роду змінює знак

$$\int_{AB} Pdx + Qdy = -\int_{BA} Pdx + Qdy \tag{14}$$

2.4. Обчислення криволінійного інтеграла другого роду

1. Нехай крива AB має параметричні рівняння $x = x(t);\ y = y(t)$, причому зміненню параметра t від α до β відповідає рух по кривій AB від A до B (таким чином, тут зовсім не обов'язково, щоб α було менше за β). Тоді

$$\int_{AB} P(x;y)dx = \int_{\alpha}^{\beta} P(x(t);y(t))x'(t)dt \tag{15}$$

Аналогічно доводяться формули

$$\int_{AB} Q(x;y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} Q(x(t);y(t))y'(t)dt \tag{16}$$

$$\int_{AB} P(x;y)dx + Q(x;y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} \left[P(x(t);y(t))x'(t) + Q(x(t);y(t))y'(t)\right]dt \tag{17}$$

2. Якщо крива AB задана рівнянням $y = y(x),\ a \le x \le b,$ де функція $y(x)$ і її похідна $y'(x)$ неперервні на проміжку $[a;b]$, то з формули (17) дістанемо

$$\int_{AB} P(x;y)dx + Q(x;y)dy = \int_{a}^{b} \left[P(x;y(x)) + Q(x;y(x))y'(x)\right]dx \tag{18}$$

3. Якщо крива AB задана рівнянням $x = x(y),\ c \le y \le d,$ причому функції $x(y)$ і $x'(y)$ неперервні на проміжку $[c;d]$, то

$$\int_{AB} P(x;y)dx + Q(x;y)dy = \int_{c}^{d} \left[P(x(y);y)x'(y) + Q(x(y);y)\right]dx \tag{19}$$

Поняття криволінійного інтегралу другого роду можна поширити й на просторові криві. В цьому випадку криволінійні інтеграли обчислюються за формулами, аналогічними формулам (15) - (19).

Часто доводиться розглядати криволінійні інтеграли по замкненому контуру, тобто контуру інтегрування, в якому початкова та кінцева точки збігаються (мова йде про замкнені контури без точок само перетину).

Для замкненого контуру існує лише два напрями обходу: проти стрілки годинника (додатна орієнтація контуру) та за стрілкою годинника (від'ємна орієнтація контуру). Іншими словами, контур вважається додатне орієнтованим, якщо при його обході область, обмежена цим контуром залишається зліва. Криволінійний інтеграл по додатне орієнтованому контуру L позначається:

$$\oint P(x;y)dx + Q(x;y)dy\,.$$

<u>Приклади</u>

1. Обчислити криволінійний інтеграл $I = \int\limits_L (xy-1)dx + x^2 y dy$ від точки $A(1;0)$ до точки $B(0;2)$ по прямій $2x + y = 2$.

Розв'язання: обидві точки A і B належать прямій $2x + y = 2$. Отже, $y = 2 - 2x$, $dy = -2dx$.

$$I = \int\limits_1^2 (x(2-2x)-1)dx + x^2(2-2x)(-2)dx = \int\limits_1^2 (4x^3 - 6x^2 + 2x - 1)dx =$$

$$(4\cdot\frac{x^4}{4} - 6\cdot\frac{x^3}{3} + 2\cdot\frac{x^2}{2} - x)\ \Big|_1^2 = 1.$$

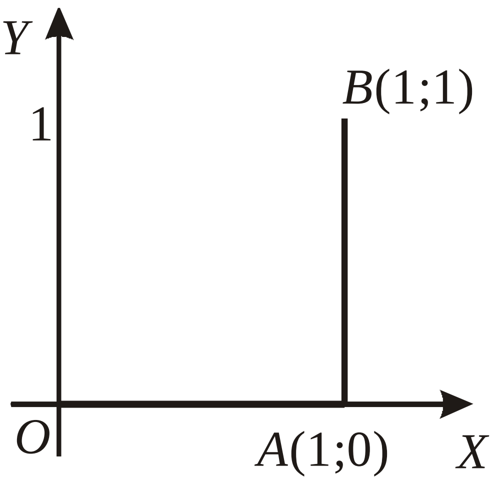
2. Обчислити криволінійний інтеграл $I = \int\limits_L \sin y dx + \sin x dy$ якщо L - відрізок прямої AB від точки $A(1;\pi)$ до точки $B(\pi;2)$.

Розв'язання: рівняння прямої AB: $\dfrac{x-0}{\pi-0} = \dfrac{y-\pi}{0-\pi}$; $\dfrac{x}{\pi} = \dfrac{y-\pi}{-\pi}$; $y = \pi - x$; $dy = -dx$. Вести інтегрування будемо за змінною x, тому в умові задачі замість

y підставимо $y = \pi - x$, а замість dy: $dy = -dx$; межі інтегрування – від $x_A = 0$ до $x_B = \pi$: $I = \int\limits_L \sin ydx + \sin xdy = \int\limits_{AB} \sin ydx + \sin xdy = \int\limits_0^{\pi} (\sin(\pi - x) - \sin x)dx =$

$$= \int\limits_0^{\pi} (\sin(x) - \sin x)dx = \int\limits_0^{\pi} 0dx = 0.$$

3. Обчислити криволінійний інтеграл $I = \int\limits_L (x+2)y^2dx + xdy$ якщо L - ломана OAB, де O(0;0), A(1;0), B(1;2).



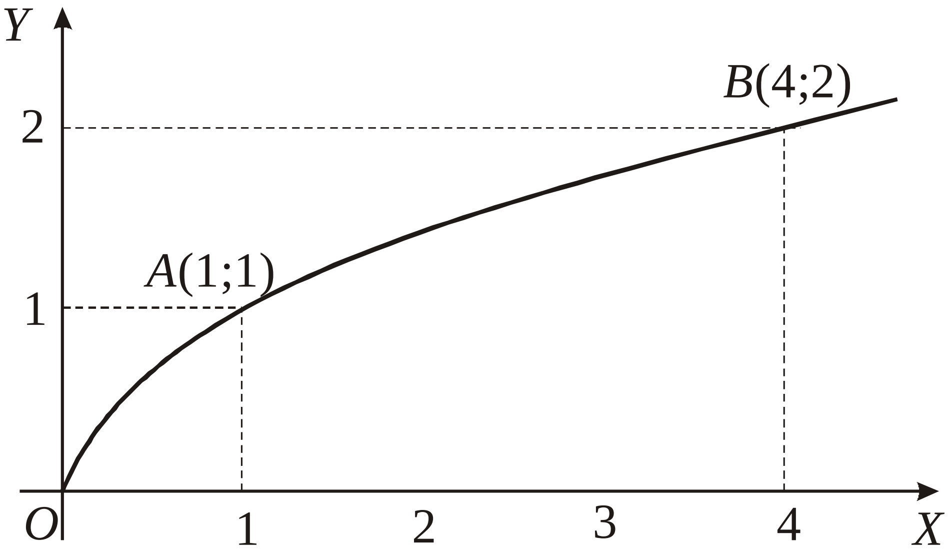
Розв’язання:

$$I = \int\limits_{OAB} (x+2)y^2dx + xdy = \int\limits_{OA} (x+2)y^2dx + xdy +$$

$+ \int\limits_{AB} (x+2)y^2dx + xdy.$ Рівняння OA: $y = 0$, тоді $dy = 0$, а x змінюється від x_O = 0 до $x_A = 1$. Рівняння відрізка AB: $x = 1$, тоді $dx = 0$, а y змінюється від y_A = 0 до $y_B = 1$. Підставивши знайдене у відповідні підінтегральні функції, дістанемо:

$$I = \int\limits_0^1 (x+2)0dx + x0 + \int\limits_0^1 (1+2)y^2 0 + 1dy = \int\limits_0^1 0dx + \int\limits_0^1 dy = 0 + y \Big|_0^1 = 1.$$

4. Обчислити криволінійний інтеграл $I=\int\limits_L 2ydx+(3x-y)dy$ вздовж дуги параболи $y=\sqrt{x}$ від точки $A(1;1)$ до точки $B(4;2)$.



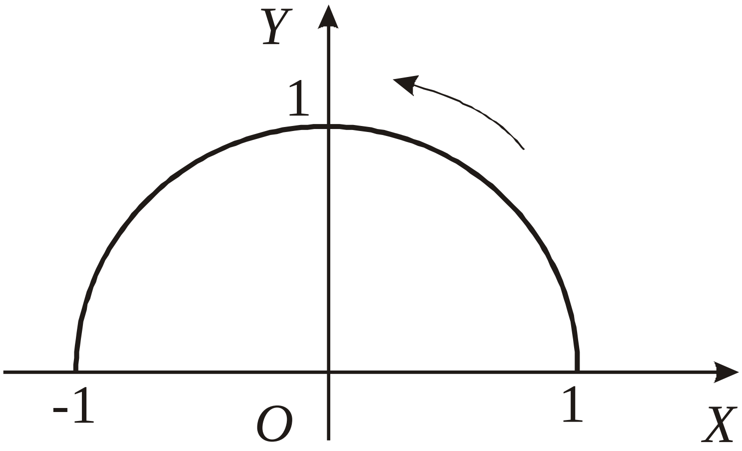
Розв'язання: рівняння кривої $y=\sqrt{x}$ отже $dy=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$ і

$$I=\int\limits_{AB} 2ydx+(3x-y)dy=\int\limits_1^4 2\sqrt{x}dx+(3x-\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=\int\limits_1^4(2\sqrt{x}+\frac{3x}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2})dx=$$

$$=\int\limits_1^4(2x^{\frac{1}{2}}+\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2})dx=\int\limits_1^4(\frac{7}{2}x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2})dx=\frac{7}{2}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x\Bigg|_1^4=\frac{7}{3}\cdot 4^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}\cdot 4-\frac{7}{3}+\frac{1}{2}=$$

$$=\frac{7}{3}\cdot 8-2-\frac{7}{3}+\frac{1}{2}=\frac{49}{3}-\frac{3}{2}=\frac{98-9}{6}=\frac{89}{6}=14\frac{5}{6}.$$

5. Обчислити криволінійний інтеграл $I=\int\limits_L(1+x)dx+3ydy$, якщо L - верхня половина кола $x^2+y^2=1$, пробігає проти ходу годинної стрілки.

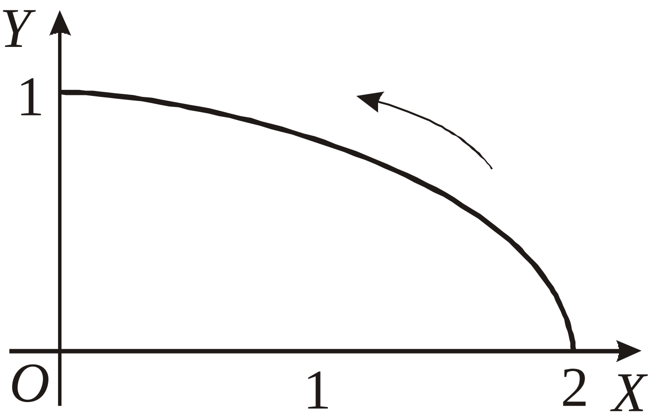


Розв'язання: верхня половина кола має рівняння $y=\sqrt{1-x^2}$, отже $dy=\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x)dx=-\dfrac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$I=\int\limits_L(1+x)dx+3ydy=\int\limits_1^{-1}(1+x)dx+3\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{-xdx}{\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=\int\limits_1^{-1}(1+x-3x)dx=\int\limits_1^{-1}(1+2x)dx=(x+2\cdot\frac{x^2}{2})\Bigg|_1^{-1}=(x-x^{\;2})\Big|_1^{-1}=-1-(-1)^2-1+1=-2.$$

6. Обчислити криволінійний інтеграл $I=\int\limits_L xydx+y^2dy$, якщо L – чверть еліпса $\begin{cases}x=2\cos t\\ y=\sin t\end{cases}$ і $0\le t\le\dfrac{\pi}{2}$.



Розв’язання: обчислимо $\begin{cases} x = -2\sin tdt \\ y = \cos tdt \end{cases}$.

Таким чином, $I = \int\limits_{L} xydx + y^2dy = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos t\sin t(-2)\sin tdt + \sin^2 t\cos tdt =$

$= \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} (-4\cos t\sin^2 t + \sin^2 t\cos t)dt = -3\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 td\sin t = -3\frac{\sin^3 t}{3}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} =$

$= -\sin^3\frac{\pi}{2} - \sin^3 0 = -1.$

7. Знайти $I = \int\limits_{AB} (x+y)dx + 2zdy + xydz$, якщо AB – дуга лінії $x = t;\ y = t^2;\ z = 3 - t$, причому A і B відповідають значенням параметра $t_A = 1;\ t_B = 2$.

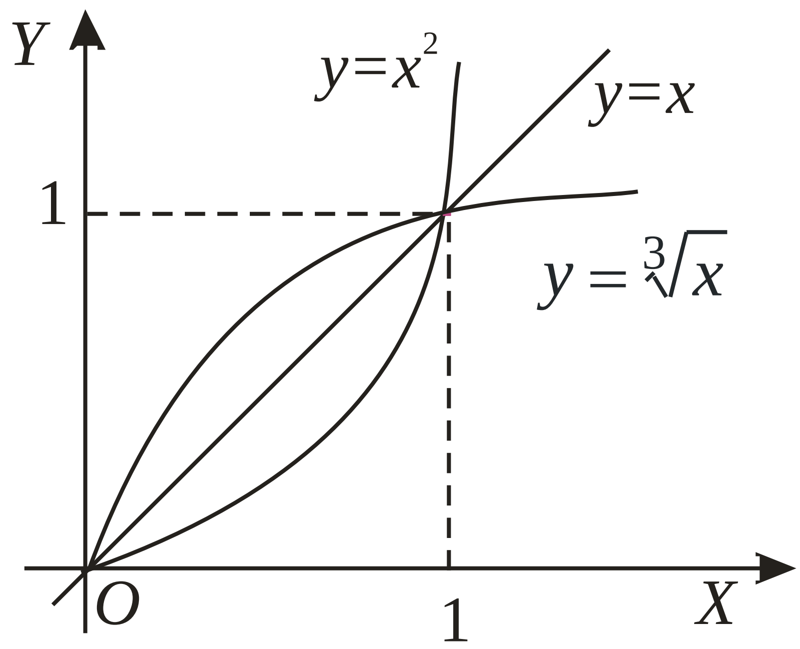
Розв’язання: перш ніж підставити $x; y; z$ в вираз під інтегралом, знайдемо $dx = dt;\ dy = 2tdt;\ z = -tdt$. Отримаємо $I = \int\limits_{1}^{2} (t + t^2)dt + 2(3-t)2tdt + t\cdot t^2 ydt =$

$= \int\limits_{1}^{2} (t + t^2 + 12t - 4t^2 + t^3)dt = \int\limits_{1}^{2} (13t - 3t^2 - t^3)dt = 13\frac{t^2}{2}\Bigg|_1^2 - 3\frac{t^3}{3}\Bigg|_1^2 - \frac{t^4}{4}\Bigg|_1^2 =$

$= \frac{13}{2}(4-1) - (8-1) - \frac{1}{4}(16-1) = \frac{35}{4}.$

8. Обчислити криволінійний інтеграл $I = \int\limits_{AB} y^2dx + 2xydy$ від точки $A(0;0)$ до точки $B(1;1)$ по лінії: а) $y = x$; б) $y = x^2$; в) $y = \sqrt[3]{x}$ (див. рис.).

Розв’язання: зобразимо ці лінії на рисунку. Маємо:



а) $y = x$; $dy = dx$; $I = \int\limits_{AB} y^2dx + 2xydy = \int\limits_0^1 (x^2 + 2x^2)dx = \int\limits_0^1 3x^2dx = x^3\Big|_0^1 = 1.$

б) $y = x^2$; $dy = 2xdx$; $I = \int\limits_{AB} y^2dx + 2xydy = \int\limits_0^1 (x^4 + 2xx^2 2x)dx = \int\limits_0^1 5x^4dx = x^5\Big|_0^1 = 1.$

в) $y = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$; $dy = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}dx$;

$$I = \int\limits_{AB} y^2dx + 2xydy = \int\limits_0^1 (x^{\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{1}{3}}x\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}})dx = \int\limits_0^1 (x^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}})dx = \frac{5}{3}\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}\Bigg|_0^1 = 1.$$

9. Обчислити криволінійний інтеграл $I = \int\limits_{AB} ydx + 2dy$ від точки $A(0;0)$ до точки $B(1;1)$ по кривих, яки задані в прикладі 8: а) $y = x$; б) $y = x^2$; в) $y = \sqrt[3]{x}$.

Розв’язання:

а) $I = \int\limits_{AB} ydx + 2dy = \int\limits_0^1 (x+2)dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + 2x\Big|_0^1 = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$;

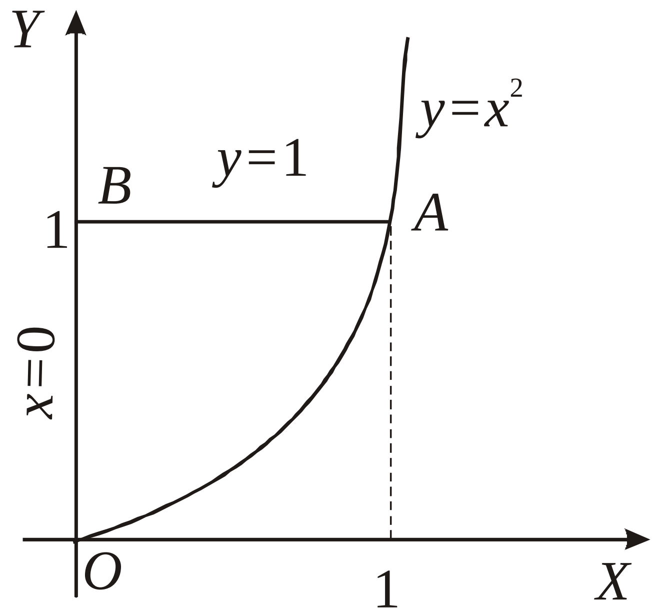
б) $I = \int\limits_{AB} ydx + 2dy = \int\limits_0^1 (x^2 + 2\cdot 2x)dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + \frac{4x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{3} + 2 = \frac{7}{3}$;

в) $I = \int\limits_{AB} y dx + 2dy = \left\{ \begin{array}{l} y = \sqrt[3]{x} \\ x = y^3 \\ dx = 3y^2 dy \end{array} \right\} = \int\limits_0^1 y 3y^2 dy + 2dy = \int\limits_0^1 (3y^3 + 2) dy =$

$$= 3\frac{y^4}{4}\bigg|_0^1 + 2y\ \bigg|_0^1 = \frac{3}{4} + 2 = \frac{11}{4}.$$

Зазначимо, що в прикладі 8 інтегрування по трьох різних кривих, що сполучають одні й ті самі точки, дає один і той самий результат. У прикладі 9 інтегрування по таким самим кривих дає різні результати. Причина цього буде з'ясована нижче.

10. Обчислити криволінійний інтеграл $I = \oint\limits_L xy dx + dy$, де L – замкнений контур, утворений лініями $y = x^2; \quad y = 1; \quad x = 0$ (див. рис.).



$$I = \oint\limits_L xy dx + dy = \int\limits_{OA} xy dx + dy + \int\limits_{AB} xy dx + dy + \int\limits_{BO} xy dx + dy.$$

Розв'язання: обчислимо кожний з інтегралів:

а) з рівняння лінії OA: $y = x^2$; $dy = 2x dx$; тому

$$\int_{OA} xydx + dy = \int_0^1 (x^3 + 2x)dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1 + x^2\Big|_0^1 = \frac{5}{4};$$

б) з рівняння лінії AB: $y = 1$; $dy = 0$; тому $\int_{AB} xydx + dy = \int_1^0 xdx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_1^0 = -\frac{1}{2}$;

в) з рівняння лінії BO: $x = 0$; $dx = 0$; тому $\int_{BO} xydx + dy = \int_1^0 dy = y\Big|_1^0 = -1$;

$$I = \oint_L xydx + dy = \frac{5}{4} - \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{4}.$$

2.5. Застосування криволінійного інтеграла другого роду

2.5.1. Обчислення площі плоскої фігури

Нехай на площині (рис. 5) задана правильна область $D = \{y_1(x) \le y \le y_2(x),\ a \le x \le b\}$. Згадаємо, що область називається правильною в напрямі Oy, якщо довільна пряма, яка проходить через внутрішню точку області D паралельно осі Oy, перетинає межу області не більше, ніж у двох точках.

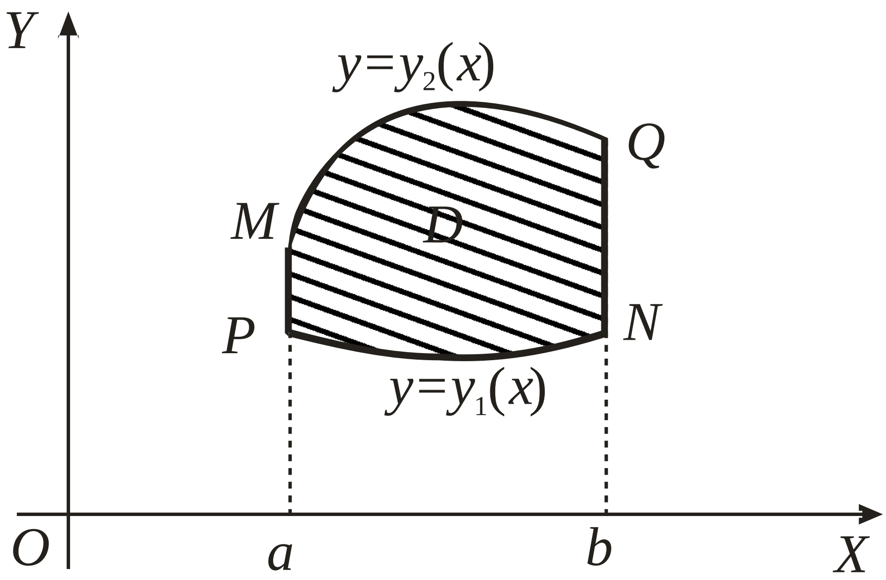
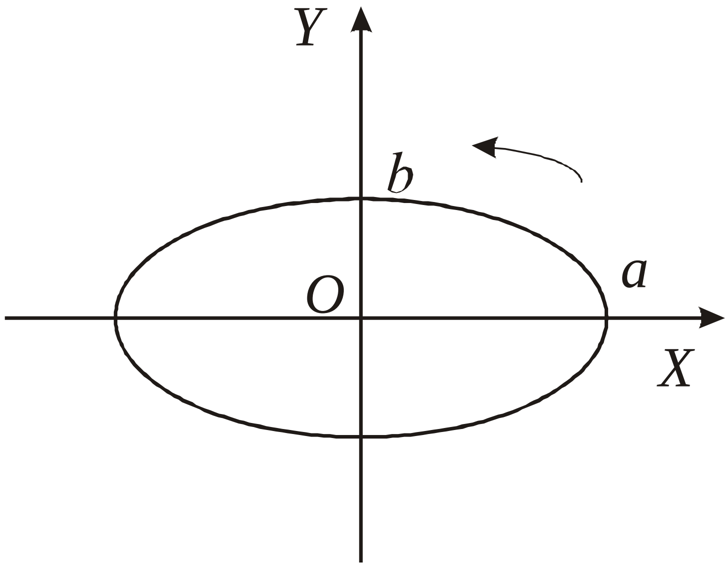


Рис. 5

Межу області D, тобто криву $PNQM$, позначимо через L і вважатимемо додатно орієнтованою. Тоді формула для обчислення площі D має вигляд:

$$S = \frac{1}{2}\oint_L xdy - ydx \qquad (20)$$

Приклади



1. Знайти площу області обмеженої еліпсом $x = a\cos t;\ \ y = b\sin t$.

Розв'язання: згідно формули (20):

$$S = \frac{1}{2}\oint_L xdy - ydx = \left\{\begin{matrix} dx = -a\sin tdt \\ dy = b\cos tdt \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\oint_L (a\cos tb\cos t + b\sin ta\cos t)dt =$$

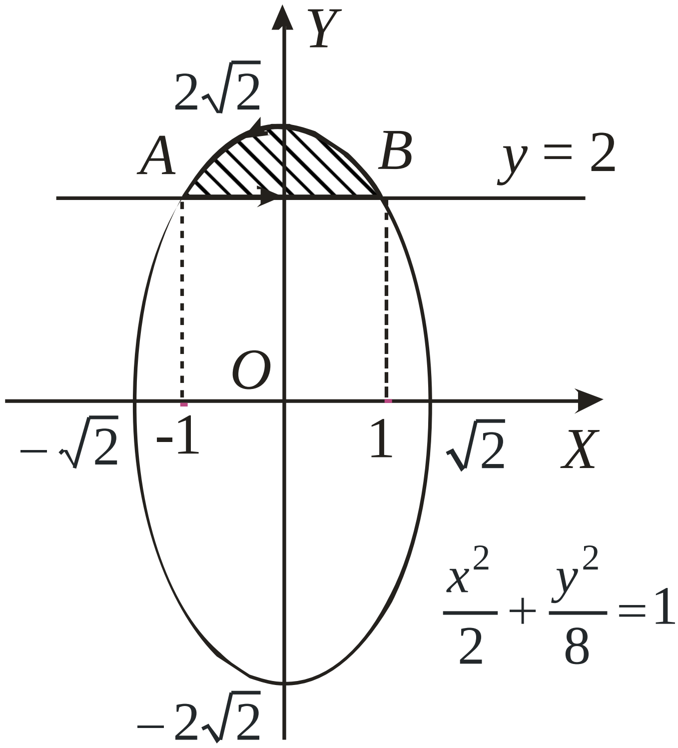
$$\frac{ab}{2}\int_0^{2\pi}(\cos^2 t + \sin^2 t)dt = \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} dt = \frac{ab}{2}t\ \Big|_0^{2\pi} = \pi ab.$$

2. За допомогою криволінійного інтегралу обчислити площу фігури, обмеженої даними лініями: $x = \sqrt{2}\cos t;\quad y = 2\sqrt{2}\sin t;\quad y = 2\quad (y \geq 2)$.

Розв'язок. В декартової системі координат – рівняння лінії $\left\{\begin{matrix} x = \sqrt{2}\cos t \\ y = 2\sqrt{2}\sin t \end{matrix}\right.$

має вигляд $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} = 1$. Це еліпс з центром в точці (0;0). Зробимо рисунок.

Формула обчислення площі фігури за допомогою криволінійного інтегралу має вигляд: $\frac{1}{2}\oint\limits_L xdy - ydx$, де контур L: $y = 2$ та $\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t \\ y = 2\sqrt{2}\sin t \end{cases}$.



Знайдемо абсциси точок A та B із системи $\begin{cases} \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} = 1 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow x = \pm 1.$

$x = -1$ - абсциса точки A, $x = 1$- абсциса точки B.

$$S = \frac{1}{2}\oint\limits_L xdy - ydx = \left\{ \begin{matrix} L_1 : y = 2 \\ L_2 : \begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t \\ y = 2\sqrt{2}\sin t \end{cases} \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2}\Big(\int\limits_{L_1} xdy - ydx + \int\limits_{L_2} xdy - ydx + \Big) =$$

$$= \frac{1}{2}(I_1 + I_2)$$

$$I_1 = \frac{1}{2}\int\limits_{L_1} xdy - ydx = \left\{ \begin{matrix} y = 2, & x_1 = -1 \\ dy = 0, & x_2 = 1 \end{matrix} \right\} = \int\limits_{-1}^{1} (-2)dx = -2x\Big|_{-1}^{1} = -2(1+1) = -4.$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\int\limits_{L_1} xdy - ydx = \left\{\begin{array}{l} y = 2\sqrt{2}\sin t, \quad dy = 2\sqrt{2}\cos tdt \\ x = \sqrt{2}\cos t, \quad dx = -\sqrt{2}\sin tdt \\ x_1 = 1 \Rightarrow t_1 = \frac{\pi}{4};\; x_2 = -1 \Rightarrow t_2 = \frac{3\pi}{4} \end{array}\right\} = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sqrt{2}\cos t \cdot 2\sqrt{2}\cos tdt +$$

$$+ \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} 2\sqrt{2}\sin t \cdot \sqrt{2}\sin tdt = 4\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (\cos^2 t + \sin^2 t)dt = 4\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} dt = 4t\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = 4\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = 2\pi.$$

$$S = \frac{1}{2}(I_1 + I_2) = \frac{1}{2}(-4 + 2\pi) = \pi - 2\,(\text{од.}^2).$$

Відповідь: $S = \pi - 2\,(\text{од.}^2)$.

2.5.2. Обчислення роботи

Нехай сила $\vec{F} = P(x;y)\vec{i} + Q(x;y)\vec{j}$ виконує роботу A при переміщенні матеріальної точки вздовж кривої L, причому функції $P(x;y)$ і $Q(x;y)$, неперервні на кривий L, тоді

$$A = \int\limits_L P(x;y)dx + Q(x;y)dy \tag{21}$$

Приклади

1. Знайти роботу сили $\vec{F} = yx\vec{i} + (x+y)\vec{j}$ при переміщенні матеріальної точки по прямій від точки $A(1;1)$ до точки $B(3;4)$.

Розв'язання: перш ніж використати формулу (21), знайдемо рівняння прямої AB. $\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}$; $\frac{x-1}{3-1} = \frac{y-1}{4-1}$; $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3}$; $2(y-1) = 3(x-1)$;

$y - 1 = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$; $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$. Звідки $dy = \frac{3}{2}dx$.

Згідно формули (21):

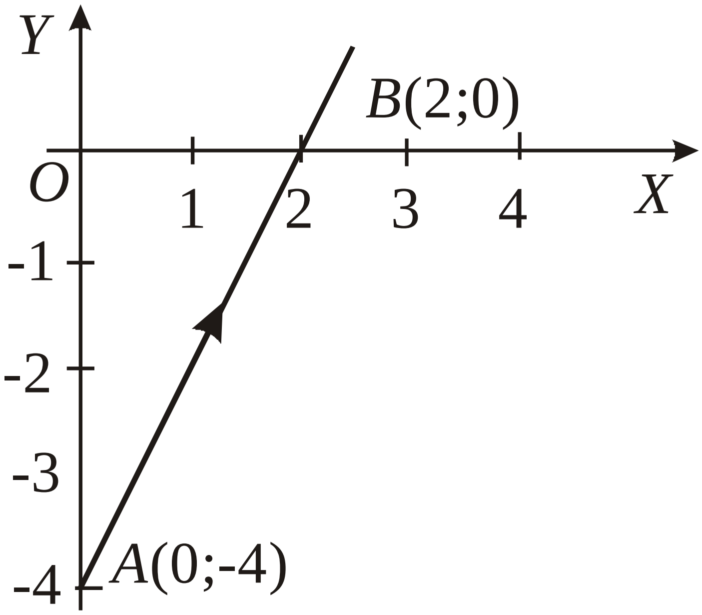
$$A=\int\limits_{AB} yxdx+(x+y)dy=\int\limits_1^2 (\frac{3}{2}x-\frac{1}{2})xdx+(\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}+x)\frac{3}{2}dx=$$

$$=\int\limits_1^2 (\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{9}{4}x-\frac{3}{4}+\frac{3}{2}x)dx=\int\limits_1^2 (\frac{3}{2}x^2+\frac{13}{4}x-\frac{3}{4})dx==\frac{3}{2}\frac{x^3}{3}\Big|_1^2+\frac{13x^2}{8}\Big|_1^2-\frac{3x}{4}\Big|_1^2=$$

$$=\frac{3}{2}\frac{x^3}{3}\Big|_1^2+\frac{13x^2}{8}\Big|_1^2-\frac{3x}{4}\Big|_1^2=\frac{1}{2}(8-1)+\frac{13}{8}(4-1)-\frac{3}{4}(2-1)=\frac{7}{2}+\frac{39}{8}-\frac{3}{4}=\frac{61}{8}.$$

2. Обчислити роботу сили $\vec{F}=(2x-y)\vec{i}-(3x+y)\vec{j}$ під час переміщення вздовж лінії L від точки $A(0;-4)$ до точки $B(2;0)$, якщо

а) L – пряма AB; б) L – еліпс $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$.



Розв’язок: а) згідно формули (21) $A=\int\limits_L \vec{F}d\vec{r}=\int\limits_L (2x-y)dx-(3x+y)dy$.

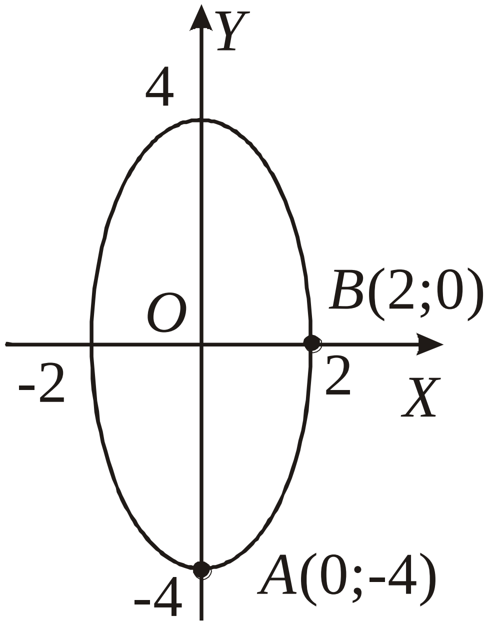
Зробимо рисунок. Як бачимо $x_1=0;\quad x_2=2$.

Рівняння прямої, яка проходить через дві точки має вигляд: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$. Тому рівняння прямої, яка проходить через точки A та B має вигляд: $\frac{x}{2}=\frac{y+4}{4}$, або $y+4=2x, \quad y=2x-4$. Тоді

$$A=\int\limits_L (2x-y)dx-(3x+y)dy=\left\{\begin{matrix} y=2x-4, & x_1=0 \\ dy=2dx, & x_2=2 \end{matrix}\right\}=\int\limits_0^2 (2x-(2x-4))dx-(3x+2x-4)2dx=$$

$$=\int\limits_0^2 (4-10x+8)dx=\int\limits_0^2 (12-10x)dx=(12x-5x^2)\Big|_0^2=23-20=4.$$

Відповідь: A = 4.



б) Зробимо малюнок. Так як $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$, маємо:

$$\frac{y^2}{16}=1-\frac{x^2}{4}; \quad y^2=16(1-\frac{x^2}{4}); \quad y=\pm 2\sqrt{4-x^2}.$$

$$A=\int\limits_L (2x-y)dx-(3x+y)dy=\left\{\begin{matrix} y=-2\sqrt{4-x^2} \\ dy=\frac{-2}{2\sqrt{4-x^2}}(-2x)dx=\frac{2xdx}{\sqrt{4-x^2}}; \\ x_1=0; \quad x_2=2 \end{matrix}\right\}=$$

$$= \int_0^2 (2x + 2\sqrt{4-x^2})dx - (3x - 2\sqrt{4-x^2})\frac{2xdx}{\sqrt{4-x^2}} = 2\int_0^2 (x + \sqrt{4-x^2} - \frac{3x^2}{\sqrt{4-x^2}} + 2x)dx =$$

$$= 2\int_0^2 (3x + 4\sqrt{4-x^2} - \frac{12}{\sqrt{4-x^2}})dx = 2(\frac{3}{2}x^2\Big|_0^2 + 4\int_0^2 \sqrt{4-x^2}dx - 12 arc\sin\frac{x}{2}\Big|_0^2) =$$

$$= \left\{\begin{matrix} x = 2\sin t & t_1 = 0 \\ dx = 2\cos t dt & t_2 = \dfrac{\pi}{2} \end{matrix}\right\} = 2(6 + 4\int_0^{\pi/2} 2\cos t \cdot 2\cos t dt - 12\frac{\pi}{2}) =$$

$$= 2(6 + 16\int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2}dt - 6\pi) = 2(6 + 8(t + \frac{1}{2}\sin 2t)\Big|_0^{\pi/2} - 6\pi) = 2(6 + 4\pi - 6\pi) = 4(3-\pi).$$

Відповідь: $A = 4(3-\pi)$.

2.5. Формула Гріна

Формула Гріна зв'язує подвійний інтеграл по області D з криволінійним інтегралом по межі L цієї області (рис. 6).

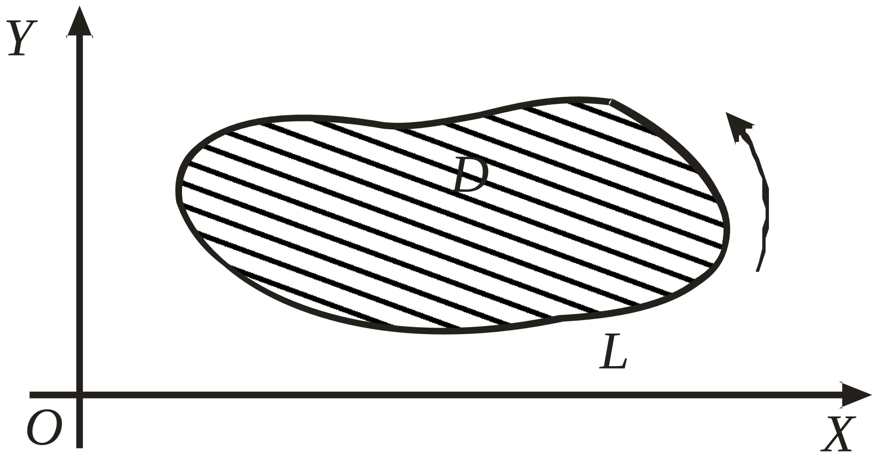


Рис. 6

<u>Теорема.</u> Нехай D – деяка правильна область, обмежена замкненим контуром L, і функції $P(x;y)$ і $Q(x;y)$ неперервні разом із своїми частинними похідними $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ і $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ в цій області. Тоді справджується формула Гріна

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint_L Pdx + Qdy \qquad (22)$$

Треба зауважити, що формула Гріна буде справедливою і для довільної області, яку можна розбити на скінчене число правильних областей.

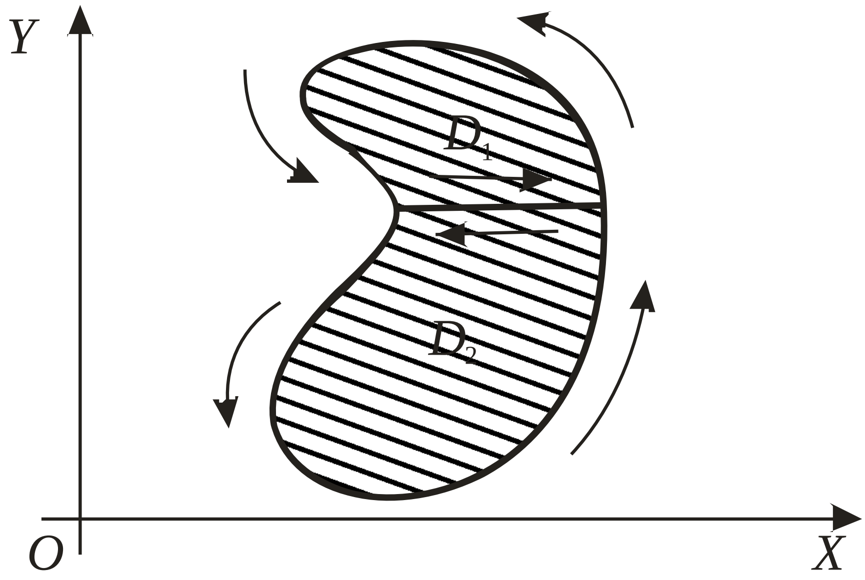


Рис. 7

Нехай, наприклад, область D (рис. 7) складається з двох областей D_1 і D_2. Запишемо формулу (22) для кожної з цих областей і складемо почленно знайдені результати. Зліва матимемо подвійний інтеграл по всій області D, а справа – криволінійний інтеграл по межі цієї області, оскільки криволінійний інтеграл по допоміжній (середній) лінії береться двічі в протилежних напрямах і при додаванні взаємно знищується.

<u>Приклади</u>

1. Обчислити криволінійний інтеграл $\oint_L (x-2y)dx + (x+y)dy$, де L - коло: $x^2 + y^2 = R^2$, а) безпосередньо; б) за формулою Гріна.

Розв'язання: а) скористаємось параметричними рівняннями кола: $x = R\cos t; \quad y = R\sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi$. Тоді $dx = -R\sin t; \quad y = R\cos t$, тому

$$\oint_L (x-2y)dx+(x+y)dy = \int_0^{2\pi}((R\cos t-2R\sin t)(-R\sin t)+(R\cos t+R\sin t)R\cos t)dt =$$

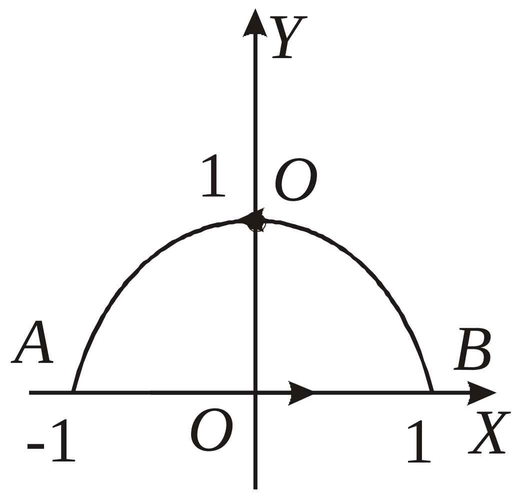
$$R^2\int_0^{2\pi}(1+\sin^2 t)dt == \int_0^{2\pi}(-R^2\cos t\sin t+2R^2\sin^2 t+R^2\cos^2 t+R^2\sin t\cos t)dt =$$

$$= R^2\int_0^{2\pi}(1+\frac{1}{2}(1-\cos 2t))dt = R^2\int_0^{2\pi}\frac{3}{2}dt-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos 2tdt = R^2\left.\frac{3t}{2}\right|_0^{2\pi} = 3\pi R^2.$$

б) $P(x;y)=x-2y;\quad Q(x;y)=x+y;\ \frac{\partial P}{\partial y}=-2;\ \frac{\partial Q}{\partial x}=1.$

$$\iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy = \iint_D 3dxdy = 3\pi R^2\ .$$

2. Записати та перевірити формулу Гріна до інтегралу $\oint_L (2x+y)dx-x^2dy$ по контуру L: $y=1-x^2,\quad y=0$.



Розв’язок: зробимо малюнок.

1) Обчислимо криволінійний інтеграл:

$$\oint_L (2x+y)dx-x^2dy = \int_{\overrightarrow{AB}}(2x+y)dx-x^2dy+\int_{\smile{BOA}}(2x+y)dx-x^2dy = L_1+L_2.$$

Обчислимо інтеграл L_1:

$$L_1 = \int\limits_{\overrightarrow{AB}} (2x + y)dx - x^2 dy = \begin{Bmatrix} y = 0 & x_1 = -1 \\ dy = 0 & x_2 = 1 \end{Bmatrix} = \int\limits_{-1}^{1} 2x dx = x^2 \Big|_{-1}^{1} = 0.$$

Обчислимо інтеграл L_2: $L_2 = \int\limits_{\breve{BOA}} (2x + y)dx - x^2 dy = \begin{Bmatrix} y = 1 - x^2, & x_1 = 1 \\ dy = -2xdx, & x_2 = -1 \end{Bmatrix} =$

$$= \int\limits_{1}^{-1} (2x + 1 - x^2)dx + 2x^3 dx = \int\limits_{1}^{-1} (2x^3 - x^2 + 2x + 1)dx = \left(\frac{x^4}{2} - \frac{x^3}{3} + x^2 + x\right)\Big|_{1}^{-1} =$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}(-1 - 1) + 1 - 1 + (-1 - 1) = \frac{2}{3} - 2 = -\frac{4}{3}.$$

$$\oint\limits_{L} (2x + y)dx - x^2 dy = L_1 + L_2 = -\frac{4}{3}.$$

2) Згідно формули Гріна $\iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \oint\limits_{L} Pdx + Qdy$.

$P = 2x + y; \quad Q = -x^2; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -2x; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 1.$ Обчислимо подвійний інтеграл.

$$\iint\limits_{D} (-2x - 1)dxdy = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{0}^{1-x^2} (-2x - 1)dy = \int\limits_{-1}^{1} dx(-2x - 1)y\Big|_{0}^{1-x^2} = \int\limits_{-1}^{1} (2x + 1)(x^2 - 1)dx =$$
$$= \int\limits_{-1}^{1} (2x^3 - 2x + x^2 - 1)dx = \frac{x^4}{2} - x^2 + \frac{x^3}{3} - x)\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - (1 - 1) + \frac{1}{3}(1 + 1) - (-1 + 1) =$$
$$= \frac{2}{3} - 2 = -\frac{4}{3}.$$

$$\iint\limits_{D} (-2x - 1)dxdy = -\frac{4}{3}.$$

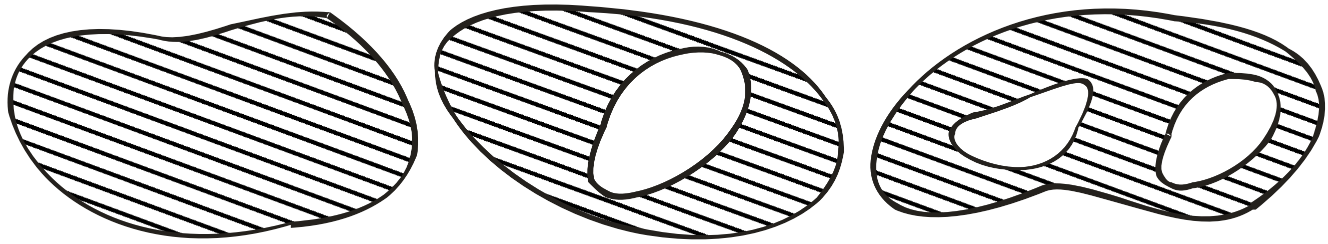
$\oint\limits_{L} (2x + y)dx - x^2 dy = \iint\limits_{D} (-2x - 1)dxdy = -\frac{4}{3}.$ Формула Гріна вірна.

Відповідь: Формула Гріна вірна.

2.6. Умови незалежності криволінійного інтеграла від форми шляху інтегрування

Як уже зазначалось, значення криволінійного інтеграла може залежати від того, якою саме кривою сполучено крайні точки шляху інтегрування, а може і не залежати. Якщо значення криволінійного інтеграла залишається однаковим по всіх можливих кривих, які сполучають кінцеві точки інтегрування, то кажуть що криволінійний інтеграл $\int\limits_L P(x;y)dx + Q(x;y)dy$ не залежить від форми шляху інтегрування.

З'ясуємо умови, за яких існує така незалежність. Нагадаємо, що однозв'язною називають область, межа якої складається з однієї замкненої без точок само перетину неперервної кусково-гладкої кривої. На рис. 9 показано: а) однозв'язну область; б) двозв'язну область; в) тризв'язну область.



а) б) в)

Рис. 9

Нехай функції $P(x;y)$ і $Q(x;y)$ визначені і неперервні разом із своїми частинними похідними $\frac{\partial P}{\partial y}$ і $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в деякий замкненої однозв'язної області D.

<u>**Теорема 1.**</u> Для того, щоб криволінійний інтеграл $\int\limits_L P(x;y)dx + Q(x;y)dy$ в області D не залежав від форми шляху інтегрування, необхідно і достатньо, щоб $\oint\limits_L P(x;y)dx + Q(x;y)dy = 0$, де L - довільний замкнений контур, який належить цій області.

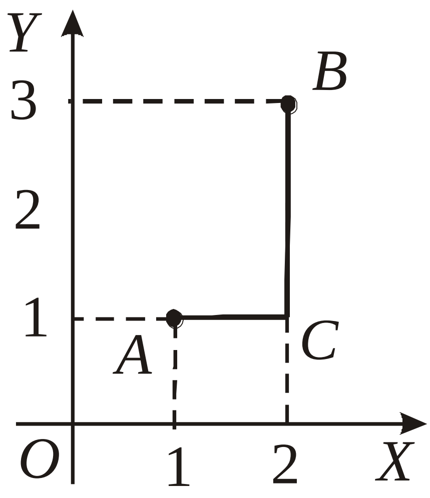
<u>**Теорема 2.**</u> Для того, щоб криволінійний інтеграл $\int\limits_L P(x;y)dx + Q(x;y)dy$ в області D не залежав від форми шляху інтегрування, необхідно і достатньо, щоб в кожній точці цієї області виконувалась умова:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \qquad (25)$$

<u>Приклади</u>

1. Обчислити $I = \int\limits_L (x+3y)dx + (y+3x)dy$ від точці A(1;1) до точці B(2;3).

Розв'язання: Даний інтеграл не залежить від шляху інтегрування, так як $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x+3y) = 3$ і $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(y+3x) = 3$. Тобто $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Тому обираємо за шлях інтегрування ломану ланки якої паралельні осям координат (див. рис.).



Маємо на відрізці AC: $y = 1;\quad dy = 0;\quad 1 \le x \le 2$.

На другому відрізці CB маємо: $x = 2;\quad dx = 0;\quad 1 \le y \le 3$.

Тоді $I = \int\limits_1^2 (x+3)dx + \int\limits_1^3 (y+6)dy = \left(\frac{x^2}{2} + 3x\right)\Bigg|_1^2 + \left(\frac{y^2}{2} + 6y\right)\Bigg|_1^3 =$

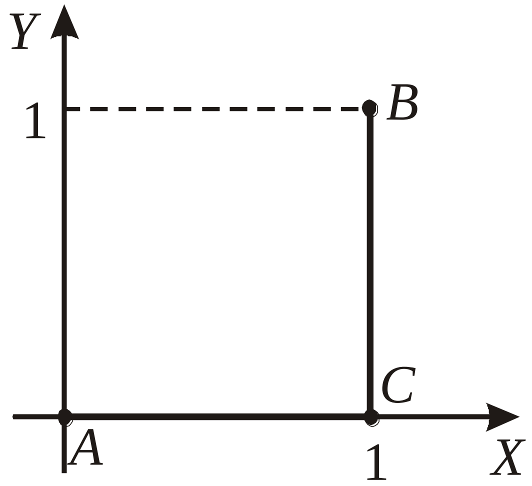
$= 2 + 6 - \frac{1}{2} - 3 + \frac{9}{2} + 18 - \frac{1}{2} - 6 = \frac{41}{2}$.

2. Розглянемо наведено раніш задачу (приклад 8 стор. 18): обчислити криволінійний інтеграл $I = \int\limits_{AB} y^2 dx + 2xydy$ від точки $A(0;0)$ до точки $B(1;1)$ по лінії: а) $y = x$; б) $y = x^2$; в) $y = \sqrt[3]{x}$.

Розв’язання: в цьому прикладі інтегрування по трьох різних кривих, що сполучають одні й ті самі точки, дає один і той самий результат. Перевіримо умову незалежності криволінійного інтегралу від шляху інтегрування:

$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(y^2) = 2y$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(2xy) = 2y$ тобто цій інтеграл не залежить від шляху інтегрування. Сам простіший метод інтегрування в цьому випадку

з’єднати кінцеві точки ламаною ланки якої паралельні осям координат (див. рис.).



1. На відрізку AC: $y = 0$; $dy = 0$ $\Rightarrow$ $I = \int\limits_{AB} y^2dx + 2xydy = 0$.

2. На відрізку CB: $x = 1$; $dx = 0$ $\Rightarrow$

$$I = \int\limits_{AB} y^2dx + 2xydy = \int\limits_0^1 2ydy = 2\frac{y^2}{2}\Big|_0^1 = 1.$$

Такий самий результат був одержане і при інтегруванні іншими шляхами.

2. Упевнитися, що інтеграл $\int\limits_{(-2;-1)}^{(3;0)} (x^4 + 4xy^3)dx + (6x^2y^2 - 5y^4)dy$ не залежать від шляху інтегрування і обчислити його.

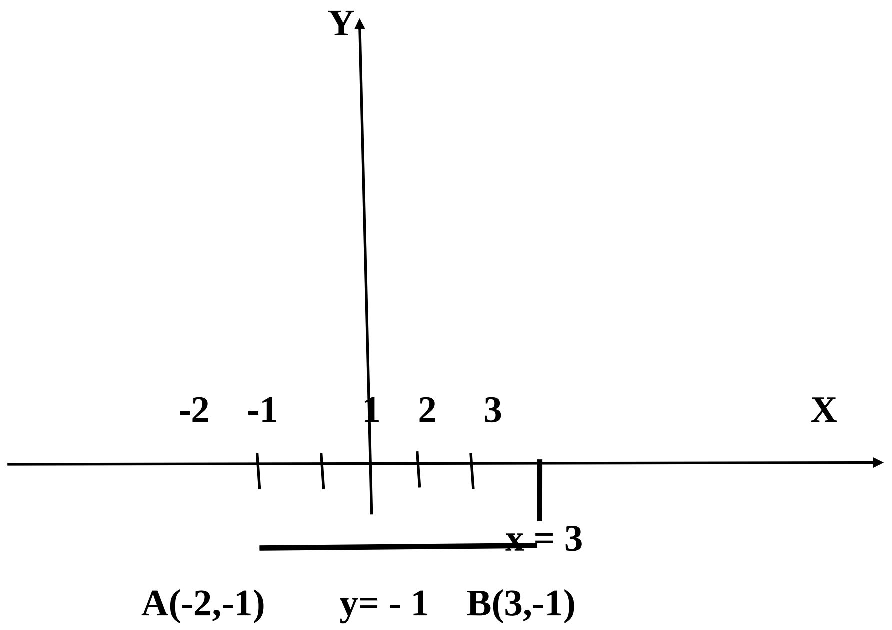
Розв’язання: Перевіримо, що інтеграл не залежить від шляху інтегрування

$$P(x,y) = x^4 + 4xy^3,\ Q(x,y) = 6x^2y^2 - 5y^4;\ \frac{\partial P}{\partial y} = 12xy^2,\ \frac{\partial Q}{\partial y} = 12xy^2 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

тоді інтеграл не залежить від шляху інтегрування.

Нехай $\int\limits_{(-2;-1)}^{(3;0)} (x^4 + 4xy^3)dx + (6x^2y^2 - 5y^4)dy = I.$

Виберемо шлях інтегрування



Розглянемо $I_1 = \int\limits_{AB} (x^4 + 4xy^3)dx + (6x^2y^2 - 5y^4)dy.$

$AB\colon y = -1, dy = 0, x_1 = -2, x_2 = 3.$

$$I_1 = \int\limits_{-2}^{3} (x^4 + 4x \cdot (-1))dx = \left(\frac{x^5}{5} - 2x^2\right)\Bigg|_{-2}^{3} = \frac{243}{5} - 2 \cdot 9 - \left(\frac{-32}{5} - 2 \cdot 4\right) =$$

$$= \frac{275}{5} - 18 + 8 = 55 - 10 = 45.$$

Розглянемо

$$I_2 = \int\limits_{BC} (x^4 + 4xy^3)dx + (6x^2y^2 - 5y^4)dy.$$

$BC\colon x = 3, dx = 0, y_1 = -1, y_2 = 0.$

$$I_2 = \int_{-1}^{0} (6 \cdot 9y^2 - 5y^4)dy = \left(18y^3 - y^5\right)\Big|_{-1}^{0} = -(-18+1) = 18 - 1 = 17.$$

$$I = I_1 + I_2 = 45 + 17 = 62.$$

Відповідь: 62.

Завдання для самостійної роботи

з теми «Криволінійні інтеграли I і II роду»

Обчислити криволінійні інтеграли:

1. $\int\limits_k (x-y)^2 dx + (x+y)^2 dy$, якщо k – ломана OAB, де O(0;0), A(2;0), B(4;2).

Відповідь: $\dfrac{136}{3}$.

2. $\int\limits_{AB} \dfrac{yds}{\sqrt{x}}$, якщо AB – дуга півкубічної параболи $y^2 = \dfrac{4}{9}x^3$ від $A(2; 2\sqrt{3})$ до $B(8; \dfrac{32\sqrt{2}}{3})$.

Відповідь: $\dfrac{2152}{45}$.

3. $\int\limits_k 2xdy - 3ydx$, якщо k – контур трикутника з вершинами A(1;2), B(3;1), C(2;5), який пробігає проти ходу годинникової стрілки.

Відповідь: 17,5.

4. $\int\limits_k ydx - (y + x^2)dy$, якщо k – дуга параболи $y = 2x - x^2$, яка розміщена над віссю Ox і пробігає за ходом годинникової стрілки.

Відповідь: 4.

5. $I=\int\limits_{AB} xyds$, якщо AB – чверть еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, який лежить у першому квадранті.

Відповідь: $\frac{ab}{3}\sqrt{a^2-b^2}$.

6. $\int\limits_{k} \frac{dy}{x}-\frac{dx}{y}$, якщо k – перша чверть кола $x=r\cos t;\ y=r\sin t$, яка пробігає проти ходу годинникової стрілки.

Відповідь: π.

7. $\oint\limits_{c} xdy-ydx$, якщо контур c: $\begin{cases} x=2\cos t \\ y=2\sin t \end{cases}$, $0\le t\le 2\pi$.

Відповідь: 8π.

8. $\int\limits_{l} (x^2-2xy)dx-(y^2-2xy)dy$, якщо l – дуга параболи $y=x^2$, від точки A(-1;1) до точки B(1;1).

Відповідь: $-\frac{14}{15}$.

9. $\int\limits_{l} y^2dx-x^2dy$, якщо l – верхня половина еліпса $x=a\cos t;\ y=b\sin t$, за ходом годинникової стрілки.

Відповідь: $\frac{4}{3}ab^2$.

10. $\int\limits_{l} (xy-1)dx-x^2ydy$, якщо l – дуга параболи $4x+y^2=4$, пробігає від точки A(1;0) до точки B(0;2).

Відповідь: $-\frac{1}{5}$.

11. $\int\limits_{l} (xy-1)dx-x^2ydy$ від точки A(1;0) до точки B(0;2) по дузі еліпса $x=\cos t;\ y=2\sin t$.

Відповідь: $-\frac{2}{3}$.

12. $\int_l xdy - ydx$, якщо l – верхня половина еліпса $x = a\cos t;\ \ y = b\sin t$.

Відповідь: πab.

13. $\int_l xdy + \frac{y}{x}dx$, якщо l – крива $y = \ln x$, пробігає від точки $A(1;0)$ до точки $B(\mathrm{e};1)$.

Відповідь: $\mathrm{e} - \frac{1}{2}$.

Індивідуальні завдання

Варіант 1

1. Обчислити криволінійні інтеграл $\int_l 6x^2y^2dx + 4x^3ydy$ вздовж лінії l – від точки $A(0;–1)$ до точки $B(1;0)$, якщо:

а) l – пряма AB; б) l – дуга параболи $y = x^2 - 1$.

Відповідь: а) 0; б) 0.

2. Обчислити криволінійні інтеграл першого роду $\int_{AB} x^2ydl$, де AB - частина кола $x^2 + y^2 = 4$, розміщена в перший чверті ($x \ge 0;\ \ y \ge 0$).

Відповідь: $\frac{16}{3}$.

3. Знайти роботу А сили $\vec{F} = x^4\vec{j}$ при переміщенні від точки $A(6;0)$ до точки $B(0;6)$ вздовж кривої l якщо:

а) l – пряма AB; б) l – коло $x^2 + y^2 = 36$.

Відповідь: а) $\frac{7776}{5}$; б) $\frac{20736}{5}$.

4. Визначити масу дуги конічної гвинтової лінії $\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi \\ z = e^t \end{cases}$,

якщо щільність розподілу матеріалу $\gamma(x; y; z) = 2z$.

Відповідь: $m = \sqrt{3}$ од. маси.

5. Перевірте формулу Гріна для інтеграла $I = \oint_L (x - y^2)dx + (y - 2x)dy$,

якщо контур L: $y = x, \quad y = 2 - x^2$.

Відповідь: $I = -5{,}4$; формула Гріна вірна.

6. Перевірте чи залежить криволінійний інтеграл I от шляху інтегрування, та вичислить його по довільному шляху з початком в точці $A(2;-1)$ і кінцем в точці $B(4;3)$, якщо $I = \int_L (y^2 + 2xy)dx + (2xy + x^2 + 4)dy$.

Відповідь: $I = 102$.

Варіант 2

1. Обчислити криволінійний інтеграл $I = \int_L y^2 dx + 2xydy$ вздовж кривої L від точки $A(0;a)$ до точки $B(a;0)$ якщо:

а) L – пряма AB; б) L – коло $x^2 + y^2 = a^2$.

Відповідь: а) 0; б) 0.

2. Обчислити криволінійні інтеграл першого роду $\int_{AB} x^2 ydl$, де AB -

$$\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 3\sin t, \quad 0 \le t \le \pi \\ z = 4t \end{cases}.$$

Відповідь: 90.

3. Обчислити роботу силового полю $\vec{F} = \frac{y}{x}\vec{i} + x\vec{j}$ під час переміщення матеріальної точки вздовж кривій $y = \ln x$ від точки $A(1;0)$ до точки $B(e;1)$.

Відповідь: $e - \frac{1}{2}$.

4. Визначити масу ділянки гвинтової лінії, розміщеної неперервне вздовж дуги кривої C: $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi \\ z = t \end{cases}$.

Відповідь: $m = 2\sqrt{2}\pi$.

5. З'ясувати, чи залежить інтеграл $I = \int\limits_L (x + 3y)dx + (y + 3x)dy$ від контуру інтегрування. Обчислити його по довільному шляху с початком в точці $A(1;1)$ и кінцем в точці $B(2;3)$.

Відповідь: $I = 20{,}5$.

6. Обчислити за допомогою формули Гріна $I = \int\limits_L - x^2 ydx + y^2 xdy$, де L – коло $x^2 + y^2 = R^2$ (обхід іде проти ходу годинникової стрілки).

Відповідь: $\frac{\pi R^4}{2}$.

Варіант 3.

1. Обчислити криволінійний інтеграл $I = \int\limits_L ydx + xdy$ вздовж лінії L від точки $A(0;1)$ до точки $B(2;0)$ якщо:

а) L – пряма AB; б) L – парабола $x - \frac{9}{4} = -(y + \frac{1}{2})^2$.

Відповідь: а) 3; б) 4.

2. Обчислити криволінійні інтеграл першого роду $\int\limits_{AB} xyzdl$, де AB – дуга кривої $x = t; \quad y = \frac{1}{3}\sqrt{8t^3}; \quad z = \frac{t^2}{2}; \quad 0 \le t \le 1$.

Відповідь: $\frac{16\sqrt{2}}{143}$.

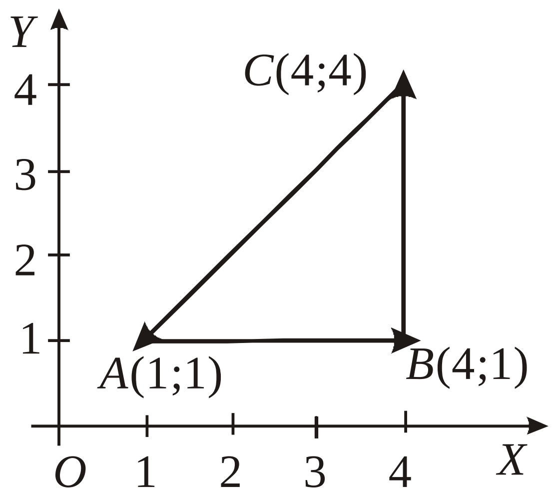
3. Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями $y^2 = 2x; \quad y^2 = 2 - x$.

Відповідь: $\frac{16\sqrt{3}}{9}$.

4. Обчислити довжину дуги кривої (циклоїди) $\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}, \quad 0 \le t \le 1$.

Відповідь: $l = 8(1 - \frac{\sqrt{2}}{2})$.

5. З'ясувати, чи залежить інтеграл $I = \int\limits_L (2xy + 1)dx + (x^2 + 3)dy$ від контуру інтегрування. Обчислити його по довільному шляху с початком в точці $A(2;-1)$ и кінцем в точці $B(4;2)$.



Відповідь: $I = 47$.

6. Обчислити за допомогою формули Гріна $I = \int\limits_L (\frac{1}{x} + \frac{1}{y})dx + (\frac{2}{y} - \frac{x}{y^2})dy$,

де L – замкнений контур ABC: $A(1;\ 1)$, $B(4;1)$, C(4;4) (див. рис.).

Відповідь: 0.

Варіант 4

1. Обчислити криволінійний інтеграл $I=\int\limits_L (x^2-y^2)dx+(x^2+y^2)dy$ вздовж кривої L від точки $A(3;0)$ до точки $B(0;2)$ якщо:

а) L – пряма AB; б) L – еліпс $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

Відповідь: а) $\frac{11}{3}$; б) $\frac{41}{3}$.

2. Обчислити криволінійні інтеграл першого роду $\int\limits_{AB} xyzdl$, де AB – перший виток гвинтової лінії $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t, \quad 0\le t\le 2\pi \\ z=t \end{cases}$.

Відповідь: $4\sqrt{2}\pi^4$.

3. Обчислити роботу сили $\vec{F}=(x+y)^2\vec{i}-(x^2+y^2)\vec{j}$ при переміщенні вздовж кривої L: $y=1-x^2$ від точки $A(1;0)$ до точки $B(0;1)$.

Відповідь: $A=-\frac{4}{3}$.

4. Обчислити довжину дуги кривої $x=16t$; $y=\frac{4\sqrt{2}}{3}t^3$; $z=\frac{1}{5}t^5$; $0\le t\le 5$.

Відповідь: $l=705$.

5. З’ясувати, чи залежить інтеграл $I=\int\limits_L (x^3+3y)dx+(3x+4y)dy$ від контуру інтегрування. Обчислити його по довільному шляху с початком в точці $A(-7;1)$ и кінцем в точці $B(1;3)$.

Відповідь: $I=6{,}75$.

6. Обчислити за допомогою формули Гріна $I = \oint\limits_L xdy - ydx$, де L – коло:

$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}, \quad 0 \le t \le 2\pi$

Відповідь: $2\pi a^2$.

Варіант 5

1. Обчислити криволінійний інтеграл $I = \int\limits_L (x^2 - y^2)dx + xydy$ якщо шляї інтегрування - відрізок прямій від точки $A(1;1)$ до точки $B(3;4)$.

Відповідь: $\dfrac{67}{6}$.

2. Обчислити криволінійні інтеграл першого роду $\int\limits_{AB} \dfrac{dl}{x - y}$, де AB відрізок прямій з кінцями в точках $A(0;-3)$ до точки $B(9;0)$.

Відповідь: $\dfrac{\sqrt{10}}{2}\ln 3$.

3. Обчислити роботу сили $\vec{F} = 2xy\vec{i} + x^2\vec{j}$ під час переміщення вздовж лінії OA – відрізок, якій з'єднує точки $O(0;0)$ до точки $A(1;1)$.

Відповідь: $A = 1$.

4. Обчислити довжину дуги кривої $y^2 = x^3$ від $x = 0$ до $x = 1$ ($y \ge 0$).

Відповідь: $l \approx 1{,}44$ лін. од.

5. З'ясувати, чи залежить інтеграл $I = \int\limits_L (8x^3 y + 2xy^2)dx + (2x^4 + 2x^2 y)dy$ від контуру інтегрування. Обчислити його по довільному шляху с початком в точці $A(1;1)$ и кінцем в точці $B(2;3)$.

Відповідь: $I = 129$.

6. Обчислити за допомогою формули Гріна $I = \oint\limits_L (x + 2y)dx - x^2 dx$, де L:

$y = 4x - x^2; \quad y = 4 - x$

Відповідь: 13,5.

Список літератури

1. Є.С. Сінайський, Л.В. *Новікова, Л.І. Заславська Вища математика Дніпропетровськ. НГУ. 2004 (частина ІІ)*

2. Геворкян Ю.Л. Теорія границь і диференціальне числення функцій однієї змінної: навч. посібник.- К.: ІСДО, 1993.-124 с.

3. Олексенко В. М. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: підручник. – Харків: НТУ «ХПІ», 2000 – 372 с.

4. Вища математика в прикладах і задачах: у 2 т. Т.1: Аналітична геометрія та лінійна алгебра. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної: навч. посібник / Л.В.Курпа, Ж.Б.Кашуба, Г.Б.Лінник [та ін.]; за ред. Л.В.Курпи. – Харків: НТУ «ХПІ», 2009. – 532с.

5. Вища математика. Розв'язання задач та варіанти типових розрахунків. Т.1.: Навч. Посібник / За ред. Л.В.Курпа. — Харків: НТУ "ХПІ", 2002 – 316с.

6. Тестові завдання за темою «Диференціювання функції однієї змінної». / упоряди.: Сушко С.О., Сточай В.Ф., Фомичова Л.Я. – Дніпропетровськ: Національний Гірничий університет, 2006. – 70 с.

7. Практикум з початків математичного аналізу: Навчальний посібник./ Новикова Л.В., Уланова Н.П., Приходько В.В. – Дніпропетровськ: НГУ, 2006. – 109 с.

8. Математика 1. Конспект лекцій. Частина 1. / Л.Я.Фомичова– Дніпро: ТОВ «Лізунов Прес», 2017. – 72 с.

9. Практикум з початків математичного аналізу: навч. посібник / Новикова Л.В., Уланова Н.П., Приходько В.В. – Дніпропетровськ: НГУ, 2006. – 109 с.

Навчальне видання

Тимченко Світлана Євгенівна
Клименко Діна Володимирівна
Щербаков Петро Миколайович
Шпорта Анна Григорівна

КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ

Методичні рекомендації до практичних занять
з дисципліни «Математичний аналіз» для здобувачів ступеня бакалавра
спеціальності 113 «Прикладна математика»

В авторській редакції

Національний технічний університет «Дніпровська політехніка»
49005, м. Дніпро просп. Дмитра Яворницького , 19